Materia: <u>Física de las Estructuras (FS-1117)</u>

Profesor:

Departamento: <u>Física</u>

Período de clases:

CRONOGRAMA DE CLASES

CONTENIDO	SEMANA
1. Repaso de vectores. Vectores de posición, desplazamiento y fuerza. Vectores unitarios, coordenadas cartesianas y cilíndricas. Componentes rectangulares de un vector. Álgebra vectorial y operaciones con vectores: suma, resta, producto de un escalar y un vector, producto escalar y vectorial. Propiedades.	1
2. Cinemática de traslación. Movimiento en el plano con aceleración constante.	1
3. Dinámica de traslación para una partícula. Leyes de Newton. Ley de gravitación de Newton. Fuerza de un resorte. Fuerza normal. Fuerza de roce. Tensiones. Línea de acción y punto de aplicación. Fuerzas concurrentes. Reducción de fuerzas. Estática de partículas.	1-2
4. Movimiento armónico simple. Cinemática: Posición, velocidad y aceleración de la partícula. Ecuación del movimiento. Dinámica. Energía del movimiento armónico simple. Masa sujeta a un resorte. Péndulo simple.	3
5. Torque sobre una partícula. Cuerpo rígido. Momento de torsión de una fuerza respecto a un punto. Torque sobre un sistema de partículas y sobre un cuerpo rígido. Teorema de Varignon. Momento de un par. El principio de transmisibilidad. Fuerzas no concurrentes. Descomposición de una fuerza en una fuerza y un par. Sistema de fuerzas y torques equivalentes actuando sobre un rígido.	4
6. Equilibrio estático de un cuerpo rígido. Diagrama de cuerpo libre. Sistema de Fuerzas coplanares actuando sobre un cuerpo rígido. Vigas y estructuras. Tipos de soportes y fuerzas causadas por ellos. Diagramas de cuerpo libre y reacciones de los apoyos. Ecuaciones de equilibrio. Cuerpos estáticamente indeterminados. Armaduras. Análisis de armaduras por el método de nudos.	4
7. Análisis de armaduras por el método de secciones. Centro de masa de un sistema de partículas. Centro de gravedad. Métodos de cálculos de centroides de líneas, aéreas y volúmenes. Centroides y momentos de inercia de áreas planas. Teorema de los ejes paralelos o Steiner. Objetos compuestos. Teoremas de Pappus-Guldinius.	5-6
8. Cargas distribuidas en vigas. Resultante de fuerzas paralelas de igual magnitud. Centro de fuerzas paralelas. Coordenadas del centro de fuerzas. Centro de fuerzas distribuidas paralelas. Fuerzas y momentos internos en vigas. Diagramas de fuerza cortante y momento flector. Relaciones entre carga distribuida, fuerza cortante y momento flector.	7-8

9. Hidrostática. Definición de fluido, presión y densidad, variaciones de la presión con la profundidad en fluidos. Fuerzas y torques en superficies sumergidas. Fuerzas sobre las paredes o compuertas. Comparación con las cargas distribuidas en vigas.	**9**
10. **a) Elementos de electricidad. Tipos de corriente, DC y AC, generación y transporte. Cableado, balanceo de cargas y seguridad.** b) Elementos de óptica. Ondas electromagnéticas, longitud de onda y frecuencia, la luz como partícula y como onda, la velocidad de la luz, fenómenos ondulatorios (difracción), fenómenos como partícula (efecto fotoeléctrico), generación de luz, la luz blanca del sol, la percepción del color, percepción del color por reflexión. c) Elementos de acústica. Ondas sonoras, frecuencias audibles, propagación del sonido, intensidad, la escala de los decibeles.	10-11

EVALUACIONES

Se realizarán dos pruebas parciales de 40% cada una y una evaluación de 20% sobre algún tópico relacionado con el curso..

TEXTOS:

Resnick-Halliday. "*FISICA*" Tomo I
Serway, Raymond. *Física*, Tomo I (4ta, 5ta o 6ta Edición)
Beer, F.P. y Johnston, E. R., *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*, Vol. I.
Bedford, Anthony y Wallace Fowler, *Mecánica para ingeniería. Estática.*
Salu, Yehuda. *Physics for Architects*

Horas de consulta:

Lugar:

e-mail:

UNIDAD II

SISTEMAS DE FUERZAS

Capítulo 1 Definiciones y Conceptos Básicos

"¿Por qué será que las cosas parecen más complicadas de lo que son..., pero menos sencillas de lo que uno desea?"...

Es necesario dar algunas definiciones e introducir determinados conceptos que usaremos frecuentemente a fin de que se tenga una terminología en común y al mencionar determinadas palabras todos las asociemos con las mismas ideas.

a. Cuerpo Puntual o Partícula

Es aquel cuya dimensión es menor que el error con que se determina su posición. No interesará su forma ni tamaño, porque no distinguiremos partes distintas de él. Se le considerará reducido a un punto y su representación práctica será la de un punto geométrico.
Un determinado cuerpo podrá ser considerado puntual en algunas circunstancias y en otras no. A lo largo del curso se verá como, al principio, ciertos cuerpos, tales como bloques, automóviles, trenes, aviones, etc. serán tratados como puntuales y más adelante se tendrá en cuenta su forma, constitución y tamaño.

b. Sistema de Partículas

Es un conjunto de partículas que se estudian en una situación determinada. Las moléculas de gas contenidas en un globo; los planetas de nuestro sistema solar o una bomba antes y después de la explosión, son ejemplos de diferentes sistemas de partículas.

c. Cuerpo Rígido

Se denomina así a un sistema de partículas en el cual la distancia entre un par cualquiera de ellas permanece invariable (dentro del error con que se miden esas distancias).
Esto implica que el cuerpo no se deformará. En realidad al interactuar dos cuerpos siempre se produce una deformación (variación de las distancias entre las partículas que constituyen los cuerpos), pero si esa variación es tan pequeña que entra en el error con que medimos las dimensiones de los cuerpos, no podemos detectarla y para nosotros los cuerpos serán "rígidos".
Veremos que a diferencia de los cuerpos puntuales, en el estudio de los cuerpos rígidos tendremos que poner atención a la traslación y rotación de los mismos.

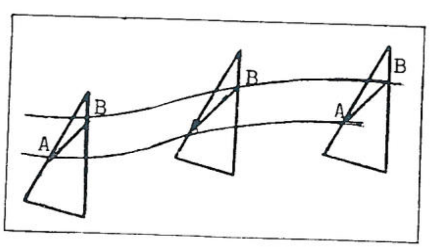


Fig. 1 Traslación de un cuerpo rígido

Aclaración:

Cuando hablamos de traslación nos referimos al movimiento donde la orientación del cuerpo no cambia.
Significa que si se dibuja una recta sobre el cuerpo, esta recta permanece siempre paralela a sí misma.
Entendemos por rotación al movimiento en el que la orientación del cuerpo rígido se modifica durante el movimiento.

El movimiento más general será una combinación de ambos, una rototraslación.
En el lenguaje cotidiano no se suele emplear la palabra rígido, sobreentendiéndose que los cuerpos lo son. Un escritorio, una silla, etc., serán considerados rígidos. Hay sin embargo cuerpos deformables y su estudio es muy importante como Ud. verá en cursos superiores (resistencia de materiales, elasticidad, fluídos, etc.).
Como en este curso no se tratará con ese tipo de cuerpos, por lo general se obviará la palabra rígido y al mencionar cuerpo se sobreentenderá que se trata de un cuerpo rígido.

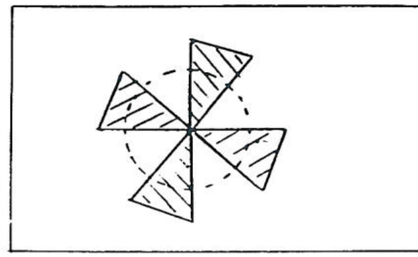


Fig. 2 Rotación de un cuerpo rígido

d. Concepto de Fuerza

Intervención efectuada por un alumno durante una de las clases, "profesor, ... las fuerzas son..., las fuerzas son..., ¿qué son las fuerzas profesor,... ?"
Mucho es lo que podría decirse sobre el concepto de fuerza, tanto desde el punto de vista filosófico como histórico.
Se podría además discutir si lo que se miden son realmente las fuerzas o los efectos que ellas provocan. Incluso se podría plantear el interrogante de si las fuerzas existen, etc., etc.
Todo ello nos llevaría a una discusión muy interesante pero que escapa al objetivo de este curso. Más adelante cuando se aborde el problema de la dinámica de la partícula (Unidad IV) trataremos el asunto con algo más de profundidad.
Mientras tanto, nos quedaremos con el concepto de fuerza que viene de nuestra experiencia cotidiana y que la costumbre y el lenguaje ya han incorporado en nosotros.
Nos referimos a esa idea de esfuerzo físico asociada al hecho de empujar un cuerpo, o a la acción de sostener un objeto o de golpear con algo a una pelota.
Si nos atenemos a este último ejemplo, se observa experimentalmente, y cualquiera puede comprobarlo a diario, que el movimiento que adquiere la pelota luego de ser golpeada ya sea por un bate de béisbol, por una raqueta de tenis o por un palo de golf, depende tanto de la intensidad con la que fue golpeada, como de la dirección y sentido del golpe.
En todos los casos que se analicen se manifestarán características similares. Para que las "fuerzas" queden bien especificadas es necesario asignarles tres propiedades:

1. Magnitud (módulo, intensidad)
2. Dirección
3. Sentido

Sin embargo no basta que una fuerza posea estas características para que pueda afirmarse que ella es un vector.
Es necesario además, que si sobre una particula están actuando simultáneamente varias fuerzas, el efecto que esas fuerzas producen sobre la partícula sea el mismo que el de una única fuerza que sea la suma vectorial de las demás.
En otras palabras, las fuerzas podrán ser tratadas como vectores si se suman como los vectores.
Esto se comprueba experimentalmente en forma muy sencilla (paralelogramo de las fuerzas) y seguramente Ud. lo ha hecho durante sus cursos de física de la escuela secundaria.
De allí que se pueda decir que las fuerzas son magnitudes físicas vectoriales y se les puede aplicar el álgebra de los vectores que se desarrolla en el apéndice de esta unidad.

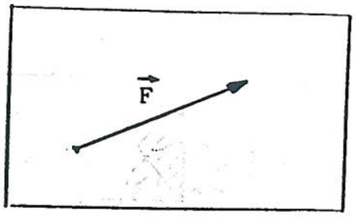


Fig.3.

La representación geométrica de una fuerza será por ejemplo la de la fig. 3, y su expresión analítica será alguna de las formas siguientes:

$\vec{F} = (3\,i + 2\,j + 6\,k)$ Kgf ó **F= (3,2,6) Kgf** ó **F= (7; 34°; 31°) Kgf**

Problemas propuestos

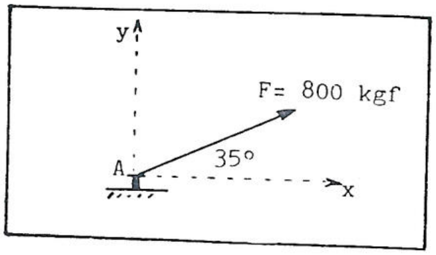


Fig.4

Nº 1: Se ejerce una fuerza F = 800 Kgf sobre el tornillo A, según se indica en la figura 4. Calcule las componentes ortogonales F_x y F_y.

Nº 2: Se aplica una fuerza $\mathbf{F} = (700\, i + 1500\, j)$ Kgf. Encontrar el módulo de la fuerza y el ángulo φ que forma ésta con la horizontal.

Nº 3: Dada la fuerza $\mathbf{F} = (-30\, i + 40\, j)$ Kgf. Determinar el módulo de **F** y el ángulo que forma con el eje x.

Nº 4: La tensión en el tirante del poste de teléfonos de la figura es de 185 Kgf. Determinar las componentes ortogonales F_x y F_y de la fuerza que actúa en A. Ver figura 5.

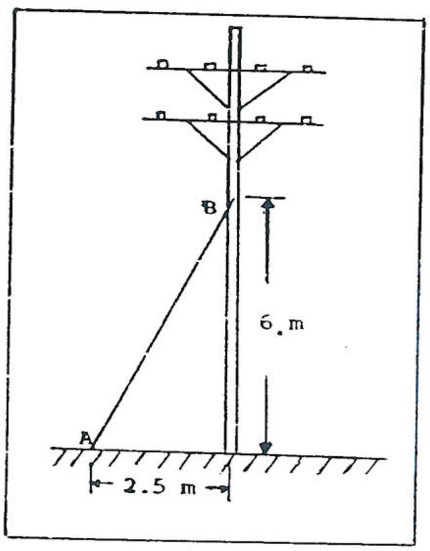


Fig.5

---

e. Sistemas de Fuerzas

Un conjunto de fuerzas actuando en una situación dada constituyen un sistema de fuerzas.

Para nosotros las situaciones que se podrán presentar son aquellas en las que el sistema de fuerzas está aplicado a una partícula, a un cuerpo rígido o a un sistema de partículas.

Los sistemas de fuerzas pueden clasificarse desde los más simples a los más complejos, de la siguiente forma:

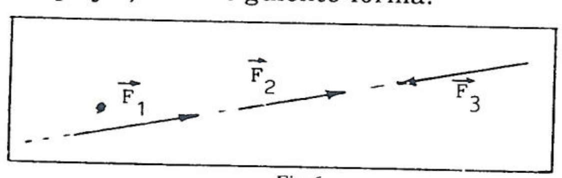


Fig.6

1. **Sistemas colineales:** todas las fuerzas del sistema tienen una línea de acción común. Fig 6.

2. **Sistemas coplanares:** las líneas de acción de todas las fuerzas del sistema están en el mismo plano, por ejemplo el plano (xy). Fig.7

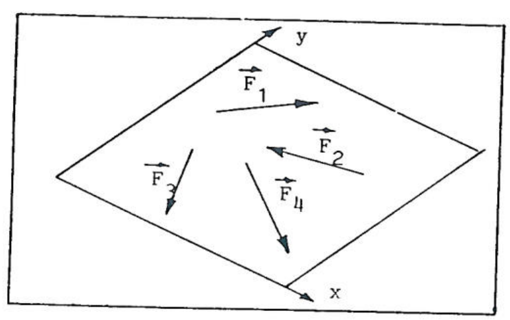


Fig.7

3. **Sistemas no coplanares:** Las líneas de acción de las fuerzas no están todas en un mismo plano.

Es conveniente subdividir a los sistemas coplanares y no coplanares en:

Concurrentes, cuando todas las líneas de acción de las fuerzas se intersectan en un punto común.

Paralelos, cuando todas las líneas de acción de las fuerzas son paralelas.

No concurrentes, no paralelos, cuando no se cumplen las condiciones anteriores.

Si el sistema de fuerzas está aplicado a una partícula, necesariamente debe ser concurrente y el punto de concurrencia es la propia partícula. Pero si el sistema de fuerzas está aplicado a un cuerpo rígido entonces puede ser de cualquier tipo, desde el más simple, el colineal, hasta el más complicado, el no-coplanar, no-paralelo, no-concurrente.
Estudiaremos todos estos sistemas y se describirán interesantes propiedades y aplicaciones de los mismos.

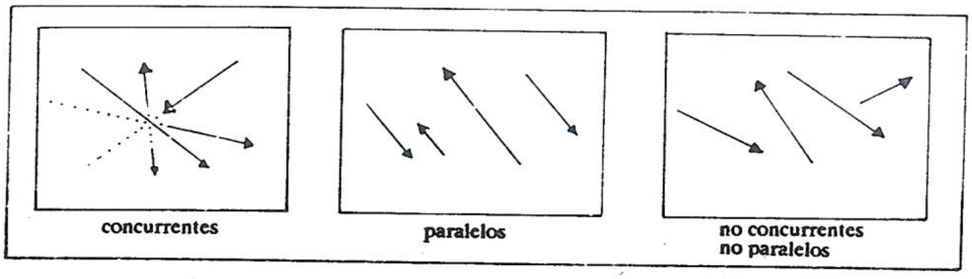


Fig.8

f. Resultante de un Sistema de Fuerzas

La resultante de un sistema de fuerzas es una fuerza, $\mathbf{F}^R$, que se obtiene haciendo la suma vectorial de todas las fuerzas del sistema.

$$\boxed{\mathbf{F}^R = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i} \qquad ec.\ 1$$

En general, el efecto que un sistema de fuerzas produce sobre un cuerpo no puede ser reproducido por la acción de esta única fuerza resultante.
Nótese que en ningún momento hablamos de un lugar de aplicación de esta fuerza. Por definición es un vector libre caracterizado por una magnitud, una dirección y un sentido. Lo del lugar de aplicación tendrá su importancia cuando se trate más adelante el tema de reducción de un sistema de fuerzas.
Para encontrar la fuerza $\mathbf{F}^R$ debemos recurrir a lo explicado en el apéndice de la unidad.

Aclaración:

Será costumbre resolver algunos ejercicios y problemas como ejemplo de lo que se está explicando. Se recomienda leer con mucho cuidado esos ejemplos tratando de seguir paso a paso los razonamientos allí hechos. Si algo no queda claro deberá repasar el tema y volver a leer el ejemplo hasta que quede completamente entendido.
Luego se proponen algunos problemas para que se aplique lo estudiado. Se pretende que resuelva todos los problemas propuestos antes de seguir adelante.
Al final de la unidad están las respuestas de todos estos problemas. Se recomienda no mirar las mismas hasta que no haya, por si mismo, intentado resolverlos.

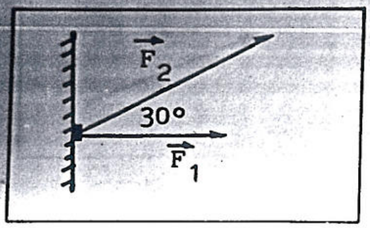


Fig. 9

Ejemplo Nº 1: Dos fuerzas F_1 y F_2 actúan sobre un tornillo como se muestra en la fig. 9, sus magnitudes son de 400 Kgf y 600 Kgf respectivamente. Determinar la magnitud, dirección y sentido de la resultante de las dos fuerzas dadas, (a) gráficamente, (b) trigonométricamente y (c) por componentes rectangulares.

Solución:

a) Se dibujan a escala los vectores F_1 y F_2 y se construye el paralelogramo. La diagonal del paralelogramo corresponde a la fuerza resultante.
La escala utilizada fue de 1 cm = 200 Kgf.
Longitud de la fuerza resultante: l = 4,8 cm. Resulta entonces:

$F^R = 4{,}8 \times 200 = 960$ Kgf.

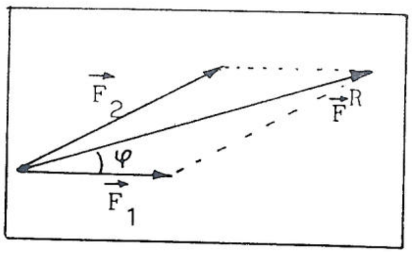


Fig. 10

El ángulo φ se mide directamente con un transportador y se obtiene φ = 18 °.
Este método no es demasiado preciso, pero para fines prácticos es suficiente. (Ver Fig. 10)

b) Se dibuja el triángulo de las fuerzas. (Fig. 11)

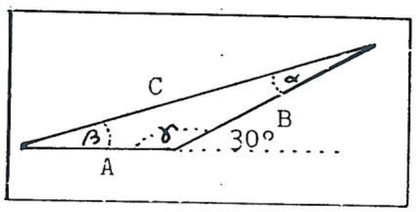


Fig. 11

A = 400 γ = 150 °
B = 600 β = ?
C = ?

Por el teorema del coseno

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos 150°$$

$$C^2 = 935.669{,}3$$

$$\boxed{F^R = 967{,}3 \text{ Kgf}}$$

Por el teorema del seno

$$\frac{C}{\text{sen } \gamma} = \frac{B}{\text{sen } \beta}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{B \text{ sen } \gamma}{C} \qquad \text{sen } \beta = 0{,}31$$

$$\boxed{\beta = 18{,}1°}$$

c) $F^R = F_1 + F_2 = F_1\, \boldsymbol{i} + F_2 \cos 30°\, \boldsymbol{i} + F_2 \text{ sen } 30°\, \boldsymbol{j}$

$$F^R_x = F_1 + F_2 \cos 30° \qquad F^R_x = 919{,}6 \text{ Kgf}$$

$$F^R_y = F_2 \text{ sen } 30° \qquad F^R_y = 300 \text{ Kgf}$$

$$F^R = \sqrt{(F^R{}_x)^2 + (F^R{}_y)^2} \qquad \text{tg}\,\beta = \frac{F^R_y}{F^R_x} = 0{,}326$$

$$F^R = \sqrt{(919{,}6)^2 + (300)^2} \qquad \boxed{\beta = 18{,}1°}$$

$$\boxed{F^R = 967{,}3 \text{ Kgf.}}$$

Ejemplo Nº 2: **Determinar la fuerza resultante del siguiente sistema de fuerzas coplanares que se muestran en la fig. 12. Encontrar su magnitud, dirección y sentido.**
Dato: sen $\varphi = 0,6$; cos $\varphi = 0,8$.

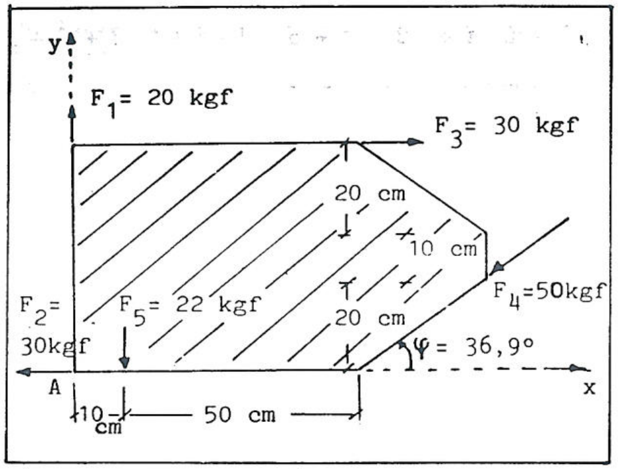


Fig.12

Solución:

$$\mathbf{F}^R = \left(\sum_{i=1}^{5} \mathbf{F}_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{5} F_{ix}\right) \boldsymbol{i} + \left(\sum_{i=1}^{5} F_{iy}\right) \boldsymbol{j}$$

$F_{1x} = 20 \cos 90° = 0$	$F_{1y} = 20 \text{ sen } 90° = 20 \text{ Kgf}$
$F_{2x} = 30 \cos 180° = -30 \text{ Kgf}$	$F_{2y} = 0$
$F_{3x} = 30 \text{ Kgf}$	$F_{3y} = 0$
$F_{4x} = -50 \cos \varphi = -40 \text{ Kgf}$	$F_{4y} = -50 \text{ sen } \varphi = -30 \text{ Kgf}$
$F_{5x} = 0$	$F_{5y} = -22 \text{ Kgf}$
$F^R_x = -40 \text{ Kgf}$	$F^R_y = -32 \text{ Kgf}$

$$\boxed{\mathbf{F}^R = (-40\, \boldsymbol{i} - 32\, \boldsymbol{j}) \text{ Kgf}}$$

$$\boxed{|\mathbf{F}^R| = 51{,}1 \text{ Kgf}} \qquad \text{tg}\,\varphi = \frac{-32}{-40} \qquad \boxed{\varphi = 218{,}6°}$$

Un error común es creer que $\varphi = 38{,}6°$. Sin embargo los signos negativos de las componentes de la fuerza resultante indican que ésta debe estar ubicada en el tercer cuadrante y por ende hay que sumarle 180° al valor anterior.

Ejemplo Nº 3: Sobre un cuerpo rígido está aplicado el siguiente sistema de fuerzas:

$F_1 = (3\, \boldsymbol{i} + 2\, \boldsymbol{j} - 3\, \boldsymbol{k})$ Kgf $\qquad F_2 = (-2\, \boldsymbol{i} - 4\, \boldsymbol{j} + 6\, \boldsymbol{k})$ Kgf

$F_3 = (-\boldsymbol{i} + 6\, \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})$ Kgf $\qquad F_4 = (5\, \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 4\, \boldsymbol{k})$ Kgf

Encontrar la resultante de este sistema.

Solución:

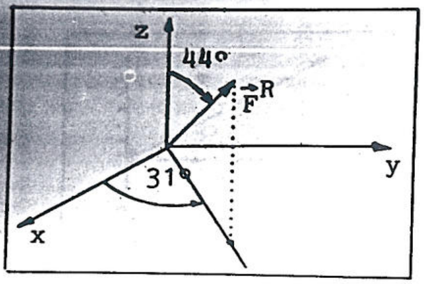


Fig. 13

$$\mathbf{F}^R = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{F}_i = (\sum_{i=1}^{4} \mathbf{F}_{ix})\, \boldsymbol{i} + (\sum_{i=1}^{4} \mathbf{F}_{iy})\, \boldsymbol{j} + (\sum_{i=1}^{4} \mathbf{F}_{iz})\, \boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{F}^R = (3 - 2 - 1 + 5)\, \boldsymbol{i} + (2 - 4 + 6 - 1)\, \boldsymbol{j} + (-3 + 6 - 1 + 4)\, \boldsymbol{k}$$

$$\boxed{\mathbf{F}^R = (\, 5\, \boldsymbol{i} + 3\, \boldsymbol{j} + 6\, \boldsymbol{k}\,)\ \text{Kgf}} \qquad |\, \mathbf{F}^R \,| = 8{,}4\ \text{Kgf}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_y^R}{F_x^R} = \frac{3}{5} \qquad \varphi = 31^\circ \qquad \cos\, \theta = \frac{F_z^R}{F^R} = \frac{6}{8.4} \qquad \theta = 44^\circ$$

Problemas propuestos

Nº 5: Cuatro fuerzas actúan en el perno A según la Fig. 14. Determinar:
a) las componentes ortogonales F_x y F_y de cada una de las fuerzas.
b) el módulo, dirección y sentido de la fuerza resultante del sistema. Fig. 14.

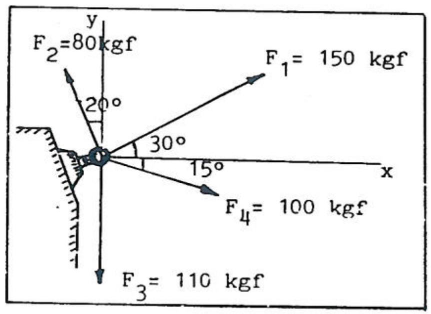


Fig. 14

Nº 6: Dos remolcadores por medio de cables arrastran una barcaza por el medio de un río.
Si la resultante de las fuerzas ejercida por los cables es paralela a las orillas del río y de magnitud 5000 Kgf, calcular:

a) la tensión de cada cable sabiendo que $\theta = 15°$.

b) el valor de θ para que la tensión T_1 sea mínima. Fig. 15.

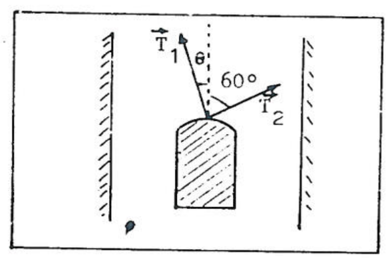


Fig. 15

Nº 7: Determinar la $\mathbf{F}^R$ del sistema de fuerzas aplicado a una placa rígida como se muestra en la figura. Fig. 16.

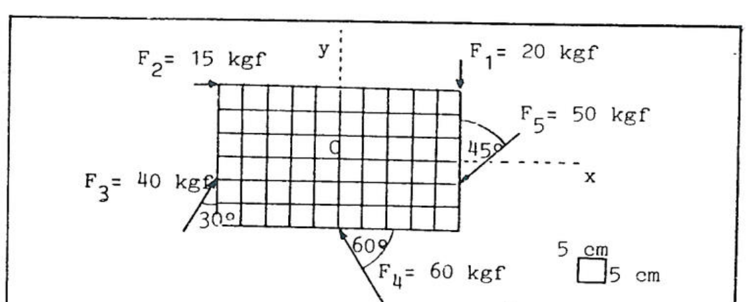


Fig. 16

---

g. Momento de una Fuerza (Torque)

Vamos a ver que además de la fuerza es necesario introducir otra magnitud física más compleja para analizar el movimiento de los cuerpos.
Imaginemos el siguiente experimento que Ud. puede realizar en su hogar. Coloquemos sobre una mesa una regla de cualquier material y que tiene un orificio en su extremo. Con un clavo que pasa por el orificio la sujetamos a la mesa de forma tal que la regla sólo pueda girar alrededor de un eje representado por el clavo (en realidad para lo que sigue no tiene importancia que la regla sólo pueda girar, sin embargo de esta manera se hace más evidente lo que se quiere mostrar).

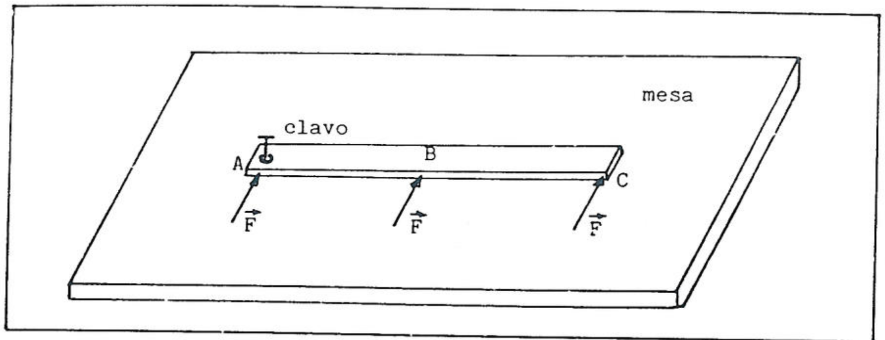


Fig.17

Se aplica ahora una fuerza **F** horizontal, perpendicular a la barra, primero en A, luego en B y posteriormente en C. En todos los casos se parte de las mismas condiciones iniciales: la barra está en reposo y paralela a uno de los bordes de la mesa.
Esa fuerza **F** podría ser, por ejemplo, la que ejerce un resorte al que se le comprime una misma longitud y se le apoya liberándolo en A, B ó C.
Se observará que a pesar de que las fuerzas aplicadas en A, en B y en C son iguales en módulo, dirección y sentido, el efecto sobre la regla es distinto para cada caso (se sugiere que se realice el experimento). Se debe observar que cuando la fuerza se aplica en A la barra permanece quieta. Cuando se la aplica en B gira un cierto ángulo hasta que se detiene y cuando se la aplica en C el ángulo girado antes de detenerse es mayor.
Si se eligen puntos intermedios entre A y C se observará que cuanto mayor es la distancia del punto de aplicación de la fuerza respecto de A, mayor es el ángulo que gira la barra.
Este hecho experimental para ser explicado necesita en principio, no sólo de la fuerza sino del punto de aplicación de la fuerza.
Que depende de la fuerza es evidente pues si comprimimos más el resorte, lo que equivale a una fuerza mayor, el ángulo descrito en cada caso (salvo A) será mayor.
Sigamos con el experimento, supongamos ahora que aplicamos la misma fuerza **F** pero en sentido opuesto, es decir del otro lado de la barra.
¿Qué se observa?... Que la rotación es en sentido opuesto naturalmente.
Por último variemos la dirección de la fuerza F. Es decir que la fuerza **F** con una magnitud fija aplicada en el punto fijo C varía su dirección como se muestra en la figura 19.
¿Qué se observa experimentalmente ? A medida que disminuye el ángulo φ (equivale a que la línea de acción de la fuerza se acerque cada vez más a A) menor es el ángulo girado por la regla: cuando $\varphi = 0°$ (distancia nula entre la línea de acción de la fuerza y el punto A) la barra permanece en reposo.
La consecuencia de todo esto es que tendremos que definir algo nuevo que involucre a la fuerza y que además tome en cuenta dónde está aplicada la misma.

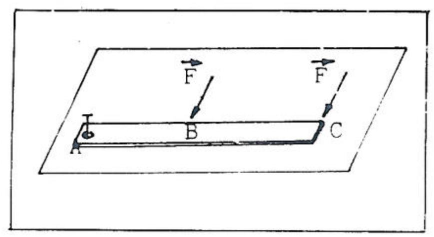


Fig.18

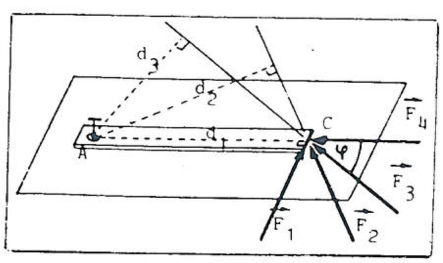
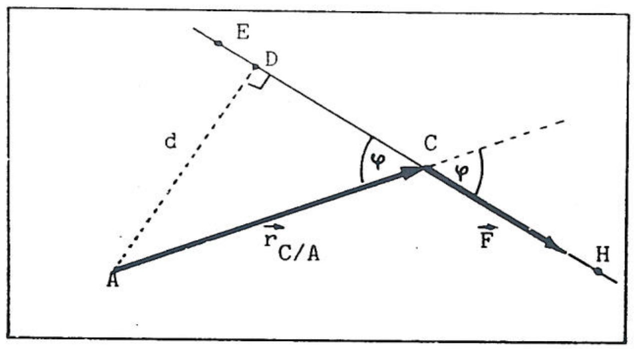


Fig.19

Más adelante, en dinámica del cuerpo rígido, se estudiará todo esto con más rigurosidad y se verá que las fuerzas tienen que ver con la traslación de los cuerpos y la nueva magnitud con las rotaciones.
Por ahora estamos tratando de entender cuáles factores junto con las fuerzas son responsables del movimiento de los cuerpos.
Veamos ahora como definimos el momento de una fuerza a fin de que pueda darnos cuenta de los hechos experimentales descritos.
Supongamos que tenemos una fuerza **F** aplicada en un punto C (puede ser una partícula o un punto cualquiera del cuerpo rígido). El punto C ocupa una posición respecto a otro punto A (que en principio es un punto cualquiera); a esa posición la denominamos posición de C respecto de A y está representada por un vector que denotaremos de la forma $\mathbf{r}_{C/A}$, ver fig. 20.



Definimos momento de la fuerza **F** aplicada en C respecto del punto A al producto vectorial del vector posición de C respecto de A multiplicado por la fuerza **F**.

Es decir: $$\boxed{\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F}}$$ *ec. 2*

¿Por qué un producto vectorial,... ?
Porque un producto vectorial da por resultado un vector y un vector está caracterizado por tres elementos, de allí que esta nueva magnitud vectorial tenga una magnitud (ella es la que estará relacionada en última instancia con el ángulo que describe la regla), una dirección (nos determinará un plano de movimiento, en el ejemplo, el plano de la mesa) y un sentido (si la regla girará en sentido horario o antihorario).
Veremos muy suscintamente que el vector momento de la fuerza definido así es útil.
Calculemos el módulo del momento.

$$\boxed{|\,\mathbf{M}_A\,| = r_{C/A} \,.\, F \,.\, \text{sen}\,\varphi}$$ *ec. 3*

Pero justamente φ era el ángulo que formaba el eje de la regla con la fuerza **F** ; si φ disminuye hasta cero el momento es nulo y experimentalmente se encontraba en ese caso que la regla no se movía. En cambio si φ tiende a 90° el momento es máximo y justamente en ese caso la regla giraba el mayor ángulo.
En forma similar, a mayor distancia mayor momento y a mayor fuerza mismo resultado. Estamos viendo que desde el punto de vista del efecto del ángulo girado, el momento justifica lo que se observa experimentalmente.

Por otra parte, como $\mathbf{r}_{C/A}$ y $\mathbf{F}$ están en el plano de la mesa su producto vectorial es perpendicular a la mesa y esa dirección puede considerarse como la perpendicular al plano de movimiento del cuerpo, de allí que se asocie la dirección del vector momento a un plano de movimiento perpendicular a esa dirección. Finalmente si se invierte el sentido de $\mathbf{F}$ el producto vectorial cambia de signo, pero invertir $\mathbf{F}$ implicaba experimentalmente que la regla giraba en sentido opuesto, de allí que podría asociarse el signo del momento de la fuerza con el sentido de rotación de los cuerpos.

Todo esto que fue demostrado en forma intuitiva será analizado en forma rigurosa al desarrollar la dinámica del cuerpo rígido. Las razones que nos llevaron a comenzar el texto con estos temas nos obligan a introducir ahora y en el tema de reducción de sistemas, conceptos que sólo alcanzarán una cabal comprensión al llegar a la unidad de sistemas de partículas.

Propiedad importante del momento:

Cabe aclarar una propiedad sumamente importante que surge de la definición del momento de una fuerza. De acuerdo a la ec. 2 y remitiéndonos a la fig. 20.

$r_{C/A} \text{ sen } \varphi = d$

$$\boxed{|M_A| = F \cdot d} \qquad \textit{ec. 4}$$

Este resultado dice que si se traslada la fuerza **F** sobre su línea de acción, el valor del momento no varía; *es el mismo cualquiera sea el punto de aplicación de la fuerza sobre su línea de acción.* Quiere decir entonces que a los fines de calcular el momento de la fuerza **F** respecto del punto A, da lo mismo si F se aplica en D, E ó H (ver fig. 20). Esto tendrá, como veremos, gran importancia. En cuanto a $\mathbf{r}_{C/A}$ ya no tiene relevancia C y este vector *es cualquiera que vaya desde A hasta un punto de la recta de acción de la fuerza.* Para ver si usted ha comprendido lo esencial de lo desarrollado en este tema, le planteamos la siguiente situación.

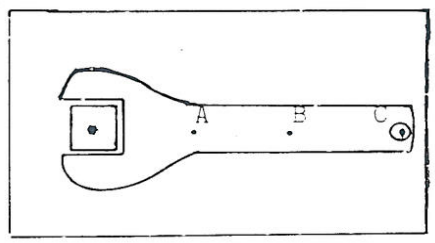


Fig.21

Ud. debe ajustar una tuerca y dispone de una herramienta como la de la fig. 21.

¿Por dónde sujetaría la llave? ... ¿Por A, por B o por C?
Si Ud. duda acerca de cuál es la respuesta correcta deberá volver a leer el tema tratando de razonar y ubicarse en el caso concreto.
Supongamos que la respuesta sea en C y le planteamos ahora el siguiente interrogante; si se ata una cuerda en C y del extremo de la cuerda Ud. hala, la fuerza que tiene que hacer para ajustar la tuerca en las mismas circunstancias que antes, ¿ es igual, mayor o menor que cuando aplicaba la fuerza directamente en C ?.

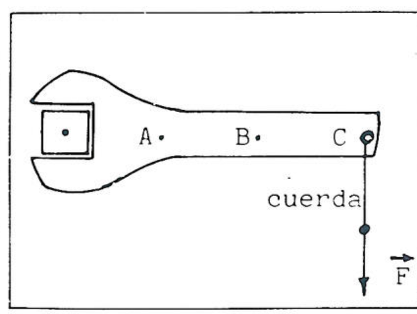


Fig.22

Finalmente, cabe aclarar que el momento de una fuerza es también un vector libre, **no hay un punto de aplicación del momento.**

Indicaciones para realizar cálculos de moméntos de fuerzas

De acuerdo a lo que se indica en el apéndice de vectores de esta unidad, el producto vectorial de dos vectores se puede calcular mediante el determinante formado de la siguiente manera:

$$\mathbf{M_A} = \mathbf{r_A} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{r_A} \times \mathbf{F} = (r_y\, F_z - r_z\, F_y)\,\boldsymbol{i} + (r_z\, F_x - r_x\, F_z)\,\boldsymbol{j} + (r_x\, F_y - r_y\, F_x)\,\boldsymbol{k}} \quad \textit{ec. 5}$$

conociendo las componentes cartesianas de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ se calcula $\mathbf{M_A}$ y si interesan el módulo, dirección y sentido se aplican las ec. A 6 del Apéndice de Vectores y se hallan $|\mathbf{M_A}|$, φ y θ

Hay muchos problemas en donde tanto $\mathbf{r_A}$ como $\mathbf{F}$ están definidos en un plano: en general el plano elegido es el (x y), y por ende el momento sólo tiene componente en la dirección de z.

En esos casos:

$$\boxed{\mathbf{M_A} = (r_x\, F_y - r_y\, F_x)\,\boldsymbol{k}} \quad \textit{ec. 6}$$

y el cálculo se simplifica bastante.

Sin embargo en estos casos suele ser más conveniente no aplicar la fórmula anterior, lo cual puede ser complicado si no se tiene como dato las componentes de los vectores, conociéndose en cambio, los módulos y el ángulo que forman entre sí los vectores.

En esos casos conviene calcular el módulo a través de:

$M_A = r\ F\ \text{sen}\ \varphi = F\ .\ d$, y la dirección y sentido encontrarlos aplicando la regla de la mano derecha.

Ejemplo Nº 4: Dada la fuerza $\mathbf{F} = (10\,\boldsymbol{i} + 5\,\boldsymbol{j})$ Kgf, que pasa por el punto P de coordenadas $\mathbf{r_p} = (0{,}4\ ;\ 0{,}3\ ;\ 0)$ m. Calcular el momento de $\mathbf{F}$ con respecto al origen, $\mathbf{M_o}$.

Solución: Por definición $\mathbf{M_o} = \mathbf{r_p} \times \mathbf{F}$ (se suprimen durante el cálculo las unidades por brevedad).

$$\mathbf{M_o} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0.4 & 0.3 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (0{,}4\ .\ 5 - 0{,}3\ .\ 10)\ \text{Kgf.m}\ \boldsymbol{k}$$

$$\boxed{\mathbf{M_o} = -1\ \text{Kgf.m}\ \boldsymbol{k}}$$

Ejemplo Nº 5: **Una fuerza F de 10 Kgf de magnitud y ubicada en el plano (x y) está aplicada sobre una partícula P que se encuentra en ese plano en la posición indicada en la fig. 23. La magnitud de r es 50 cm. Calcular el momento de la fuerza respecto de O. Fig. 23.**

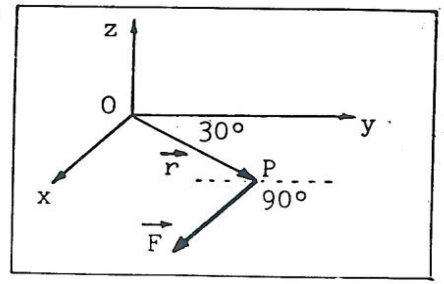


Fig.23

Solución:

$$\mathbf{M_o} = \mathbf{r_p} \times \mathbf{F}$$

$\mathbf{r_p} = (50 \text{ sen } 30° \; \boldsymbol{i} + 50 \cos 30° \; \boldsymbol{j})$ $\qquad$ $\mathbf{r_p} = (25 \; \boldsymbol{i} + 43{,}3 \; \boldsymbol{j})\,\text{cm}$

$\mathbf{F} = 10 \cos 0° \; \boldsymbol{i} + 10 \text{ sen } 0° \; \boldsymbol{j}$ $\qquad$ $\mathbf{F} = (10\,\text{Kgf}) \; \boldsymbol{i}$

$$\mathbf{M_o} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 25 & 43.3 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{M_o} = -\,433 \text{ Kgf . cm } \boldsymbol{k}$$

$$\boxed{\mathbf{M_o} = (-\,4{,}3 \text{ Kgf . m}) \; \boldsymbol{k}}$$

Esto podría haberse calculado directamente ya que ambos vectores **r** y **F** están contenidos en el plano (x, y) y sus módulos son conocidos. La dirección del producto vectorial es perpendicular al plano (x, y), en este caso es la del eje z.

El módulo se calcula de la definición $M_o = r_p \; F \text{ sen } 60° = 4{,}3$ Kgf . m.

El signo se obtiene mediante el uso de la regla de la mano derecha y es negativo, por eso:

$$\boxed{\mathbf{M_o} = (-\,4{,}3 \text{ Kgf . m}) \; \boldsymbol{k}}$$

Ejemplo Nº 6: Se tiene una manivela tal como se muestra en la fig. 24, sobre la cual se aplica en B una fuerza perpendicular de 5 Kgf de magnitud. Calcule el momento de esa fuerza respecto al punto O. Fig. 24.

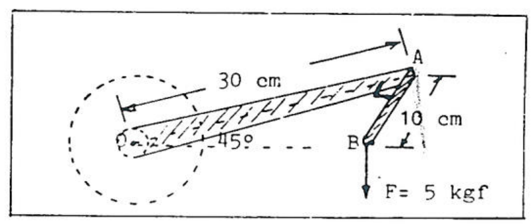


Fig.24

Solución: Por definición $\mathbf{M_o} = \mathbf{r_B} \times \mathbf{F}$. Por suma de vectores sabemos que:

$$\mathbf{r_B} = \mathbf{r_A} + \mathbf{r_{B/A}}$$

Además:

$\mathbf{r_B} = (30 \cos 45° \boldsymbol{j} + 30 \text{ sen } 45° \; \boldsymbol{k})$ cm $\qquad$ y $\qquad$ $\mathbf{r_{B/A}} = (10 \text{ cm}) \; \boldsymbol{i}$

$$\boxed{\mathbf{r_B} = (21{,}2 \; \boldsymbol{j} + 21{,}2 \; \boldsymbol{k} + 10 \; \boldsymbol{i})\,\text{cm}}$$

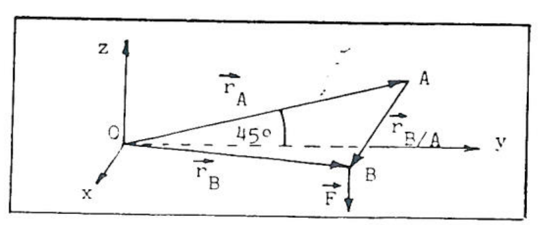


Fig.24 a.

Por otra parte;

$$\boxed{\mathbf{F} = (-5 \text{ Kgf}) \; \boldsymbol{k}}$$

h. Momento resultante de un Sistema de Fuerzas

Si se tiene un sistema de fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_i$, ..., $\mathbf{F}_n$, aplicadas en puntos cuyas posiciones respecto de O son $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, ..., $\mathbf{r}_i$, ..., $\mathbf{r}_n$, cada fuerza ejerce un momento respecto de O.
Se define como momento resultante del sistema de fuerzas respecto de O a la suma de los momentos de cada una de las fuerzas respecto al mismo punto O. (Fig. 29)

Es decir,
$$\boxed{\mathbf{M}_o^R = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_{i/o} \times \mathbf{F}_i)} \qquad \textit{ec. 7}$$

Este es también un vector libre, se calcula respecto de un punto pero no está aplicado en ninguno.

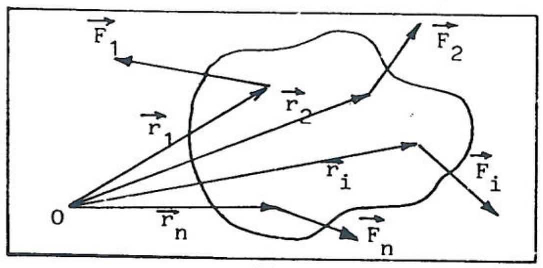


Fig.29

Ejemplo Nº 8: Hallar el momento resultante respecto al origen del sistema de coordenadas del siguiente sistema de fuerzas concurrentes, aplicadas en el punto A de coordenadas $\mathbf{r}_A = (2, 1, 0)$ m.

$\mathbf{F}_1 = (\, \boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} + 3\,\boldsymbol{k} \,)$ Kgf

$\mathbf{F}_2 = (\, 2\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} \,)$ Kgf

$\mathbf{F}_3 = (\, 4\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \,)$ Kgf

Solución:

$$\mathbf{M}_o^R = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ F_{x_i} & F_{y_i} & F_{z_i} \end{vmatrix}$$

$$M_{o_1} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (\, 3\,\boldsymbol{i} - 6\,\boldsymbol{j} + 3\,\boldsymbol{k} \,)\,\text{Kgf . cm}$$

$$M_{o_2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 4\,\boldsymbol{k}\ \text{Kgf . cm}$$

$$\mathbf{M}_{o_3} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (\boldsymbol{i} - 2\,\boldsymbol{j} + 8\,\boldsymbol{k})\,\text{Kgf.cm}$$

$$\mathbf{M}_o^R = (4\,\boldsymbol{i} - 8\,\boldsymbol{j} + 15\,\boldsymbol{k})\ \text{Kgf.cm}$$

Nótese que en este caso particular, como el vector posición es el mismo para todas las fuerzas, se podría haber sacado como factor común de la sumatoria y hubiera quedado:

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{r} \times \sum_{i=1}^{3} \mathbf{F}_i = \mathbf{r} \times \mathbf{F}^R$$

Es decir que se habría podido calcular primero la fuerza resultante y luego hacer un solo producto vectorial. **Esto no es válido en general.**

Ejemplo Nº 9: En el ejemplo Nº 2 calcular el momento resultante del sistema de fuerzas respecto del punto A.

Solución:

$$\mathbf{M}_A^R = \sum_{i=1}^{5} \mathbf{M}_{i_A}$$

Por ser un sistema coplanar, conviene calcular cada momento mediante el módulo y buscar el signo por la regla de la mano derecha.

$\mathbf{M}_{1A} = 0$ $\qquad$ $\mathbf{M}_{2A} = 0$ $\qquad$ $\mathbf{M}_{3A} = -0{,}5 \times 30 = (-15\ \text{Kgf.m})\ \boldsymbol{k}$

$\mathbf{M}_{4A} = -0{,}6 \times 50 \times \text{sen}\ 36{,}9° = (-18\ \text{Kgf.m})\ \boldsymbol{k}$ $\qquad$ $\mathbf{M}_{5A} = 0{,}1 \times 22 = (-2{,}2\ \text{Kgf.m})\ \boldsymbol{k}$

$$\mathbf{M}_A^R = (-35{,}2\ \text{Kgf.m})\ \boldsymbol{k}$$

Se le sugiere rehaga los cálculos utilizando determinantes. Debe encontrar, por supuesto, el mismo resultado.

Ejemplo Nº 10: Dadas las siguientes fuerzas, aplicadas en los puntos que se indican, calcular el momento resultante del sistema de fuerzas, respecto al origen del sistema de coordenadas:

$\mathbf{r}_1 = (3, 2, 2)$ m $\qquad$ $\mathbf{F}_1 = (-1, 2, 1)$ Kgf

$\mathbf{r}_2 = (-1, 3, 4)$ m $\qquad$ $\mathbf{F}_2 = (2, 0, -3)$ Kgf

$\mathbf{r}_3 = (1, 0, 1)$ m $\qquad$ $\mathbf{F}_3 = (0, 0, 4)$ Kgf

$\mathbf{r}_4 = (0, 2, -1)$ m $\qquad$ $\mathbf{F}_4 = (2, 2, 0)$ Kgf

Solución:

$$a)\ M_o = \sum_{i=1}^{4} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ F_{x_i} & F_{y_i} & F_{z_i} \end{vmatrix}$$

$$M_o = \sum_{i=1}^{4} [\,(y_i F_{z_i} - z_i F_{y_i})\boldsymbol{i} + (z_i F_{x_i} - x_i F_{z_i})\boldsymbol{j} + (x_i F_{y_i} - y_i F_{x_i})\boldsymbol{k}\,]$$

$$M_o = \sum_{i=1}^{4} (y_i F_{z_i} - z_i F_{y_i})\,\boldsymbol{i} + \sum_{i=1}^{4} (z_i F_{x_i} - x_i F_{z_i})\,\boldsymbol{j} + \sum_{i=1}^{4} (x_i F_{y_i} - y_i F_{x_i})\,\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned} M_o = {} & [(2 \times 1 - 2 \times 2) + (3 \times (-3) - 4 \times 0) + (4 \times 0 - 1 \times 0) + (2 \times 0 - (-1) \times 2)]\,\boldsymbol{i}\ + \\ & + [(2 \times (-1) - 3 \times 1) + (4 \times 2 - (-1) \times (-3)) + (1 \times 0 - 1 \times 4) + \\ & + ((-1) \times 2 - 0 \times 0)]\,\boldsymbol{j} + [(3 \times 2 - 2 \times (-1)) + ((-1) \times 0 - 3 \times 2) + \\ & + (1 \times 0 - 0 \times 0) + (0 \times 2 - 2 \times 2)]\,\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

$$\boxed{M_o = (-9\,\boldsymbol{i} - 6\,\boldsymbol{j} - 2\,\boldsymbol{k})\ \text{Kgf.m}} \qquad \boxed{M_o = 11\ \text{Kgf.m}}$$

Problemas propuestos

Nº 14: En el problema propuesto Nº 7 calcule el momento resultante del sistema respecto al punto O.

Nº 15: Encuentre el momento resultante respecto al origen de coordenadas, del siguiente sistema de fuerzas que pasan por los puntos que se indican:

$F_1 = (3, 1, 2)$ Kgf $\qquad r_1 = (2, 3, -4)$ cm

$F_2 = (2, 4, -2)$ Kgf $\qquad r_2 = (7, 3, 1)$ cm

Nº 16: Dado el sistema de fuerzas que se muestra en la fig. 30, calcule el momento resultante del sistema respecto de O.

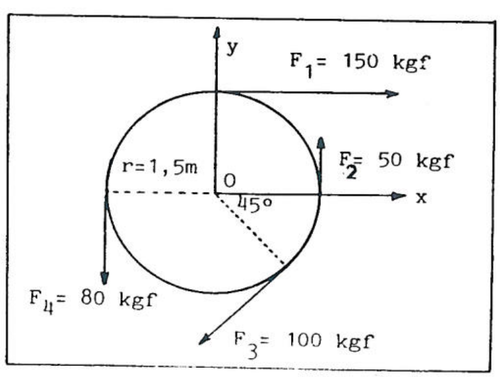


Fig. 30

Capítulo 2
Reducción de Sistemas de Fuerzas

La razón de dedicarle un capítulo especial a este tema radica en la importancia que el mismo tiene, tanto desde el punto de vista conceptual como por sus aplicaciones prácticas.
El enfoque que haremos del tema será tal que pretendemos que se entiendan las ideas aunque no las demostremos rigurosamente.
Como fue advertido con anterioridad hay cosas que diremos que deberán ser aceptadas porque son bastante lógicas y razonables pero quedará pendiente su demostración hasta que podamos plantear las así llamadas "ecuaciones fundamentales de la mecánica", cosa que haremos en la unidad VII correspondiente a sistemas de partículas.
Le pedimos que trate de seguir paso a paso la línea de razonamiento que haremos y que observe la coherencia interna que hay en la misma.

¿Qué significa reducir un sistema de fuerzas?...
Reducir un sistema de fuerzas aplicado a un cuerpo rígido (de ahora en adelante supondremos que los sistemas de fuerzas están aplicados a cuerpos rígidos o como caso especial a un cuerpo puntual) significará encontrar otro sistema de fuerzas que le provoque al cuerpo rígido los mismos efectos, pero que sea más simple (menor cantidad de fuerzas), ó que esté constituído por fuerzas específicas aplicadas en lugares determinados del rígido.
En otras palabras, reducir un sistema de fuerzas es reemplazarlo por otro que le provoque al cuerpo rígido los mismos efectos pero que sea más útil o más práctico para los fines que nos proponemos.
En lo escrito anteriormente hay dos aspectos a analizar. Por una parte debemos entender que significa la frase de "que provoque los mismos efectos sobre el cuerpo rígido" y por otra parte qué significa que sea "más útil para los fines que nos proponemos".
El aspecto utilidad lo dejaremos hasta llegar a los ejemplos concretos y nos limitaremos ahora a tratar de entender el primer aspecto.

Si tenemos un cuerpo rígido cualquiera, por ejemplo un escritorio y lo empujamos (aplicamos fuerzas). ¿Qué efecto tendrá nuestra acción sobre el escritorio?... **Hágalo, es útil visualizar el efecto que se produce.**
Descartemos el hecho de que pueda deformarse o romperse pues por definición es rígido (no empuje una almohada de plumas).
Observaremos que las únicas posibilidades son:
– que permanezca quieto (caso en que esté apoyado en una pared y Ud. empuje hacia la pared).
– que se mueva ya sea trasladándose o rotando (si empuja desde el centro de uno de los bordes verá que se traslada sin rotar, si en cambio empuja desde un borde notará que a la par que se desplaza el escritorio rota).
El concepto de traslación y rotación ya fue analizado con anterioridad y allí se explicó que el movimiento más general es una combinación de ambas, una rototraslación. Que se quede quieto es un caso particular en donde tanto la traslación como la rotación son nulas.

En conclusión, los efectos que un sistema de fuerzas puede provocarle a un cuerpo rígido son los de trasladarlo y rotarlo.

Ahora bien, si los efectos son los de trasladar y rotar al cuerpo, que dos sistemas provoquen los mismos efectos significará que al reemplazar un sistema por otro la traslación y la rotación del cuerpo deben ser las mismas. Sigamos con el razonamiento... ¿de quién es la responsabilidad de que un cuerpo se traslade?
Como las fuerzas tienen que ver con las traslaciones y los momentos con las rotaciones, es lógico suponer que la fuerza resultante de un sistema de fuerzas es la responsable de la traslación del cuerpo y que el momento resultante es el responsable de la rotación del cuerpo rígido.
Si hay fuerza resultante y momento resultante distintos de cero el cuerpo tendrá una rototraslación.

Esto es intuitivo, pero será rigurosamente demostrado en general en la unidad de Sistemas de partículas y en partícular en la unidad de Dinámica del cuerpo rígido.

Entonces, si los efectos son una traslación y una rotación y eso se debe a la fuerza resultante y al momento resultante, que dos sistemas de fuerzas **provoquen los mismos efectos** quiere decir que necesariamente los dos sistemas deben tener la misma fuerza resultante y el mismo momento resultante.

Definición

Un sistema de fuerzas aplicado a un cuerpo rígido es **equivalente a** otro sistema cuando ambos tienen la misma fuerza resultante y el mismo momento resultante.

Conclusión

Reducir un sistema de fuerzas significa encontrar otro sistema equivalente apto para nuestros fines.

Aceptado esto, nos plantemos los siguientes interrogantes ...¿Será posible reducir cualquier sistema de fuerzas a una única fuerza?...
...De no ser así, ¿cuál será la mínima reducción de un sistema de fuerzas?...
Basta encontrar un sistema de fuerzas que no pueda ser reducido a una única fuerza para que la respuesta al primer interrogante sea nó.
Existe un sistema muy, pero muy simple, que no puede ser reducido a una única fuerza, este sistema es tan importante que tiene nombre propio.
Vamos a definir la *cupla o par de fuerzas.*

a. Cupla o Par de Fuerzas

Una cupla o par de fuerzas es un sistema que consiste de dos fuerzas de magnitudes iguales, líneas de acción paralelas no colineales y sentidos opuestos.

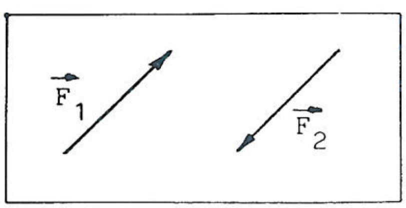


Fig.31

El sistema mostrado en la fig. 31, es una cupla si $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ y no son colineales.

Por definición, la fuerza resultante de este sistema es nula.

$$\boxed{F^R = 0}$$

Veamos que sucede con el momento resultante de la cupla. Calculamos este momento respecto a un punto cualquiera O.
Como el momento resultante es la suma de los momentos, resulta:

$$\mathbf{M_o = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2}$$

Como por definición: $\mathbf{F_2 = -F_1}$

$$\mathbf{M_o = r_1 \times F_1 + r_2 \times (-F_1)}$$

Por propiedades del producto vectorial:

$$M_o = \mathbf{r_1} \times \mathbf{F_1} - \mathbf{r_2} \times \mathbf{F_1} = (\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}) \times \mathbf{F_1}$$

Luego, independientemente de cual sea O, resulta:

$$M_o = (\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}) \times \mathbf{F_1}$$

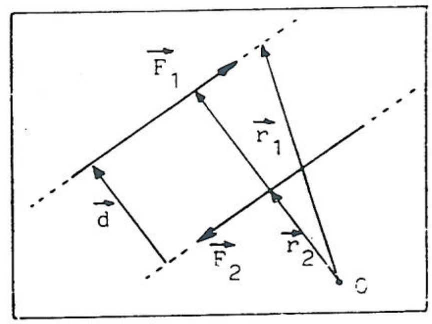


Fig.32

Pero $\mathbf{r_1}$ es un vector que va desde O hasta cualquier punto de la línea de acción de $\mathbf{F_1}$; en forma similar $\mathbf{r_2}$ es un vector que va desde O a cualquier punto de la línea de acción de $\mathbf{F_2}$. Esto fue demostrado y enfatizado cuando se definió el momento de una fuerza. De no recordarlo se le sugiere que regrese y repase ese tema.
De alli que no se pierde generalidad si se eligen a $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$ como se muestra en la fig. 32.

$\mathbf{r_1 - r_2 = d}$ $\qquad$ $M_o = \mathbf{d} \times \mathbf{F_1}$ $\qquad$ pero $\mathbf{d} \perp \mathbf{F_1}$

Entonces:

$$\boxed{|M_o| = d \cdot F_1}$$

Estos resultados nos muestran tres cosas muy importantes:
1– el momento de una cupla nunca es nulo.
2– este momento no depende del punto respecto al cual se lo calcula. Por ende puede eliminarse el subíndice O pues para cualquier punto que se considere se obtendrá el mismo resultado.
3– la dirección de este momento siempre es perpendicular al plano que contiene a las dos fuerzas. Para hallar el sentido basta ubicar el punto O sobre una de las fuerzas y por la regla de la mano derecha se ve hacia donde sería el giro.

De ahora en adelante, al momento de una cupla lo denotaremos por **C** y se graficará: ↷
¿Qué representa una cupla desde un punto de vista práctico?
Como la fuerza resultante de una cupla es nula, no podrá provocar ninguna traslación al ser aplicada sobre un cuerpo. Pero como tiene momento resultante distinto de cero significa que al ser aplicada sobre un cuerpo, le provocará una rotación.

Conclusión

El efecto de una cupla sobre un cuerpo es el de provocar una rotación pura del mismo.

Hay numerosos ejemplos de la vida cotidiana en donde Ud. aplica cuplas. Por ejemplo, cuando debe cambiar un neumático, las fuerzas que ejerce en los extremos de la llave cruz constituyen una cupla que le permite ajustar o aflojar las tuercas. ¿Se le ocurre algún otro ejemplo?...

Propiedad importante

El hecho de que el momento de la cupla C sea independiente respecto del punto al que se lo calcula nos lleva a que se pueden cambiar los puntos de aplicación de las fuerzas de la cupla sin que cambie el efecto de rotación del rígido, pues esta rotación depende de C y no de donde se apliquen las fuerzas. Más aún, se puede modificar la distancia entre las fuerzas a condición de variar sus módulos para que C no varíe y también se puede variar si se desea la dirección de estas fuerzas.
Lo único que importa es que el valor de C sea siempre el mismo. Los ejemplos que se presentan más adelante le ayudarán a terminar de entender esto.

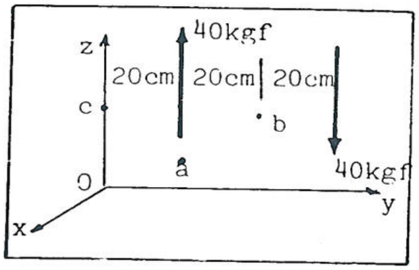


Fig.33

Ejemplo Nº 11: Determinar el momento de la cupla mostrada en la fig. 33, con respecto a los puntos a, b y c.

Solución: Ya sabemos que debe obtenerse el mismo resultado pues C debe ser independiente del punto respecto al cual se lo calcula. Sin embargo, como ejercitación haremos los cálculos. En todos casos sabemos que la dirección de C debe ser la del eje x, por ende, calcularemos directamente esa componente.

a) $C_x = -0{,}4 \times 40 = -16$ Kgf . m

b) $C_x = -0{,}2 \times 40 - 0{,}2 \times 40 = -16$ Kgf . m

c) $C_x = 0{,}2 \times 40 - 0{,}6 \times 40 = -16$ Kgf . m

Se le sugiere que rehaga los cálculos usando determinantes. Note que si en lugar de fuerzas de 40 kgf separadas 0,4 m, tuviera fuerzas de 80 Kgf separadas 0,2 m , obtendría el mismo resultado.
Lo mismo sería si las fuerzas en lugar de ser paralelas al eje z fueran paralelas al eje y, o a cualquier otra dirección dentro del plano xy.

Problemas propuestos

Nº 17: Calcular el momento de la cupla mostrada en la fig. 34.
Nº 18: Calcular el momento del par de fuerzas de la fig. 35.
Nº 19: Dado el par de fuerzas de la fig. 36, calcular el momento C del par.

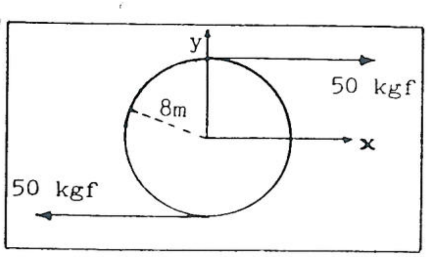


Fig.34

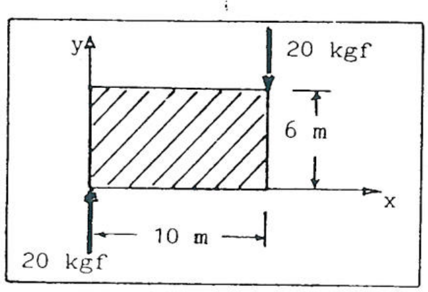


Fig.35

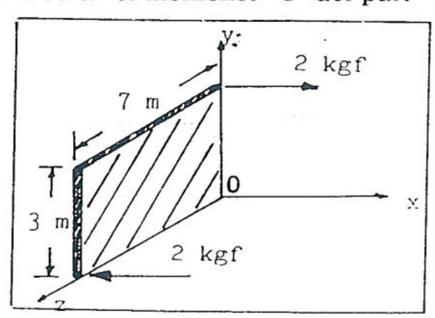


Fig.36

b. Sistemas que no se reducen a una fuerza

Luego de haber introducido la cupla, retomamos ahora la idea que habíamos comenzado a desarrollar acerca de la reducción de un sistema de fuerzas. En general, dado un sistema de fuerzas no será posible reducirlo a una única fuerza (que de ser así sería la fuerza resultante). El caso de la cupla nos asegura esto ya que allí la resultante es nula y por ende ese sistema no puede reducirse a esa única fuerza.

Pero, por todo lo razonado anteriormente, podemos entender que bastaría una fuerza, **la resultante**, más **una cupla** para poder reducir cualquier sistema de fuerzas.

Sería necesario, por supuesto, que el momento resultante del sistema de fuerzas original sea igual al momento del sistema final.

Si a la fuerza resultante se la hace pasar por el punto respecto del cual se calculó inicialmente el momento, el momento final será solamente el de la cupla. De no ser así se deberá agregar el momento de la $\mathbf{F}^R$.

Conclusión

"Cualquier sistema de fuerzas aplicado a un cuerpo rígido, puede ser reducido a una fuerza, la resultante, más una cupla. La fuerza resultante será la responsable de los efectos de traslación del cuerpo, y la cupla, la responsable de la rotación del mismo."

Ahora bien, dado un sistema de fuerzas... ¿Cómo encontrar otro que sea equivalente?

Debe cumplirse, de acuerdo a lo definido y explicado, que:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{n'} \mathbf{F}_i' \qquad \rightarrow \qquad \text{Igualdad de } \mathbf{F}^R$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^{n'} (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}'_i) \qquad \rightarrow \qquad \text{Igualdad de } \mathbf{M}^R$$

Cuando tenemos un sistema de fuerzas cualquiera, que actúa sobre un cuerpo rígido, siempre podemos encontrar otro que le sea equivalente mediante una o varias de las siguientes operaciones, las cuales no alteran el estado de reposo o movimiento del cuerpo:

1– Descomponiendo la fuerza en dos componentes.

2– Reemplazando dos o más fuerzas concurrentes por una fuerza resultante (se demostrará más adelante).

3– Eliminando o añadiendo dos fuerzas que siendo colineales tengan igual módulo y sentidos opuestos.

4– Moviendo una fuerza a lo largo de su línea de acción (sin salirse del cuerpo).

No creemos conveniente profundizar más este tema, los ejemplos siguientes aclararán estos puntos.

Ejemplo Nº 12: Dados dos sistemas de fuerzas:

Sistema 1

F_1 = (300 i – 150 j + 100 k) Kgf ; con su línea de acción pasando por el punto P_1 (4, 0, 6).

F_2 = (283 i – 283 j) Kgf ; con su línea de acción pasando por el punto P_2 (8, 0, 0).

F_3 = (520 i – 300 k) Kgf ; con su línea de acción pasando por el punto P_3 (4, 0, – 6).

Sistema 2

F_4 = (1103 i – 433 j – 200 k) Kgf ; con su línea de acción pasando por el origen de las coordenadas.

C_1 = (900 i – 520 j – 2864 k) Kgf . m

donde las coordenadas de los puntos están expresadas en metros. Determinar si estos sistemas son equivalentes al aplicarlos sobre un mismo cuerpo.

Solución:

Para el Sistema 1: F^R = (1103 i – 433 j – 200 k) Kgf y M^R es,

$M^R = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + r_3 \times F_3$ = (900 i – 520 j – 2864 k) Kgf . m

El Sistema 2 tiene la misma fuerza resultante y el mismo momento resultante, por ende ambos sistemas son equivalentes.

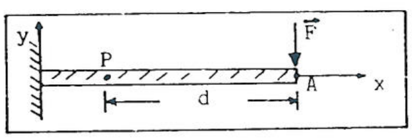


Fig.37

Ejemplo Nº 13: Dada la fuerza **F** que actúa sobre el cuerpo rígido ilustrado en la fig. 37, en el punto A, reemplácela por un sistema equivalente que actúe en P.

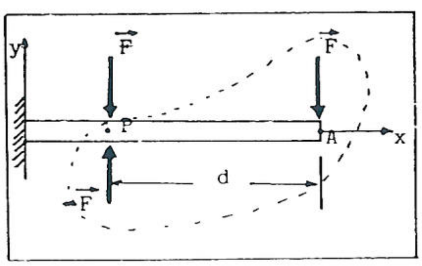


Fig.38

Solución: Sabemos que no se puede trasladar la fuerza **F** del punto A al punto P sin modificar su efecto sobre el cuerpo, ya que P no está en la línea de acción de la fuerza. Entonces, ¿cómo procedemos?... Podemos aplicar en P dos fuerzas iguales y de sentidos opuestos de tal manera que su resultante es nula y en consecuencia su inclusión no causa ningún efecto sobre el cuerpo (ver fig. 38).

Por lo tanto este nuevo sistema es equivalente al original y consta de una fuerza **F** aplicada en P y una cupla (–**F**, **F**). El momento de la cupla tiene módulo d.F y sentido según (–k) porque tiende a producir un giro en el sentido del movimiento de las agujas del reloj. Observe que el momento de la cupla es igual al de la fuerza **F** respecto del punto P. Por lo tanto cualquier fuerza **F** que actúa sobre un cuerpo rígido en un punto dado, puede sustituirse por otra de igual módulo, dirección y sentido que actúa en un punto P arbitrario del cuerpo, siempre que se añada una cupla de momento igual al de **F** con respecto a P. En la fig. 39 se representa el nuevo sistema que es equivalente al original.

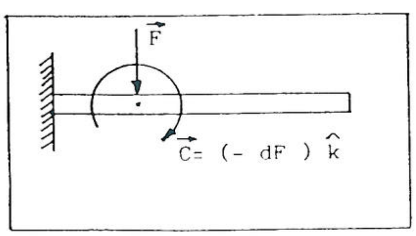


Fig.39

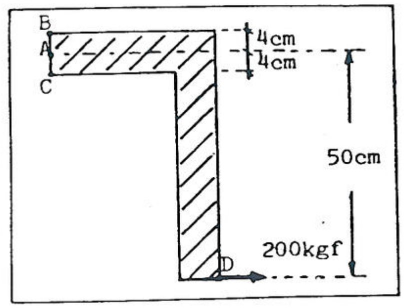


Fig. 40

Ejemplo N° 14: **En el cuerpo mostrado en la fig. 40, reemplazar la fuerza de 200 Kgf por una fuerza que pase por A y por una cupla cuyas fuerzas son horizontales y pasan por los puntos B y C.**

Solución: **Antes de comenzar a resolver este problema, tratemos de entender que puede significar un problema de este tipo.**
Ese cuerpo podría ser una pieza de mampostería que va a ser sometida a una fuerza horizontal de 200 Kgf en el punto D.
Esa pieza, por ejemplo, deberá sujetarse a una pared en los puntos A, B y C.
Reemplazar la fuerza de 200 Kgf por otras aplicadas en esos puntos, significa encontrar cuáles fuerzas y cuplas iguales y opuestas habrá que ejercer sobre la pieza (mediante bulones, cemento, etc.) para que permanezca en su sitio.
Este sería un caso concreto de reducir un sistema de fuerzas (una única fuerza de 200 Kgf) a otro sistema formado por una fuerza y una cupla aplicadas en determinados lugares.
Por ello decíamos con anterioridad que reducir un sistema de fuerzas era reemplazarlo por otro que provoque los mismos efectos pero que sea más útil para los fines que nos proponemos.

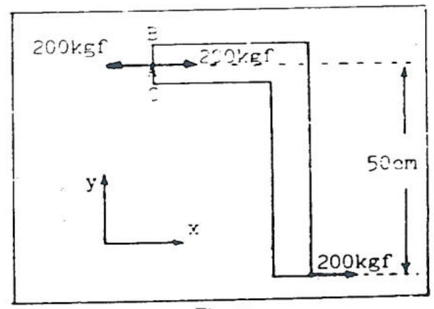


Fig. 41

Veamos como se resuelve el problema. En A podemos hacer actuar las fuerzas de 200 Kgf, como se muestra en la fig. 41, sin que se altere el sistema.
Hemos obtenido así, una fuerza que pasa por A y una cupla de 0,5 m x 200 Kgf.

Es decir $\qquad C = (100\ \text{Kgf}.\text{m})\ \boldsymbol{k}$

Como nos interesa que el par de fuerza esté aplicado en B y C, y la distancia que separa estos puntos es d = 0,08 m, tendremos que buscar cuál deberá ser el módulo de las fuerzas del par que pasarán por esos puntos y tal que su momento sea 100 Kgf . m.

$$d\,.\,F' = 100\ \text{Kgf}.\text{m}$$

$$F' = \frac{100}{0.08}\ \text{Kgf}$$

$$F' = 1250\ \text{kgf}$$

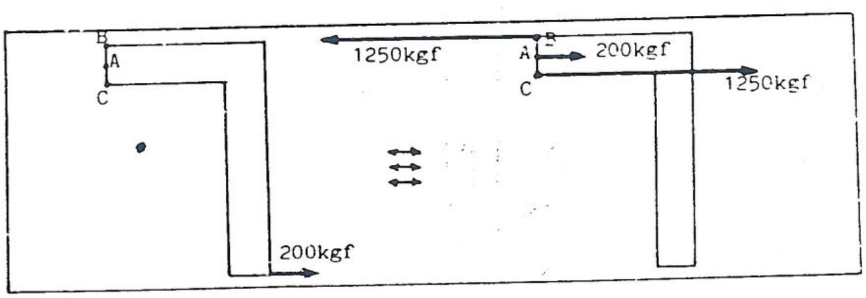


Fig. 42

Se puede verificar que ambos sistemas tienen la misma fuerza resultante y el mismo momento resultante respecto a cualquier punto.
Aprovechemos este ejemplo para insistir sobre algo que se mencionó anteriormente, pero que puede no haber quedado claro.
Si calculamos el momento inicial respecto de A nos da $M_A = 100$ Kgf . m y el momento final respecto de A sería sólo el de la cupla pues F^R pasa por A y su momento es nulo. El momento de la cupla vale 0,08 x 1250 = 100 Kgf . m y todo anda bien.
Sin embargo, supongamos que calculamos el momento inicial del sistema con respecto a B. Eso nos da M_B = 0,54 x 200 = 108 Kgf. Es razonable que dé diferente que antes ya que se calcula respecto a otro punto.

Si calculamos el momento final del sistema

$$M_B = C + 0{,}04 \times F^R = 100 \text{ Kgf.m} + 0{,}04 \times 200 \text{ Kgf.m}$$

$$M_B = 108 \text{ Kgf.m}$$

y nuevamente se obtiene un resultado coherente. ***El error que se suele cometer en estos casos es olvidarse del momento de la fuerza resultante; este momento sólo es nulo si la línea de acción de la resultante pasa por el punto respecto del cual se calcula el momento.***

Problemas propuestos

Nº 20: Se tienen dos sistemas de fuerzas que actúan sobre el mismo cuerpo (no simultáneamente):

Sistema 1

$F_1 = (10\, \boldsymbol{i} + 30\, \boldsymbol{j} + 8\, \boldsymbol{k})$ Kgf ; con su línea de acción pasando por el punto $P_1\,(0,0,1)$

$F_2 = (5\, \boldsymbol{i} - 10\, \boldsymbol{j} + 10\, \boldsymbol{k})$ Kgf ; con su línea de acción pasando por el punto $P_2\,(1,1,0)$

$C_1 = (8\, \boldsymbol{i} - 2\, \boldsymbol{j} + 12\, \boldsymbol{k})$ Kgf.m

Sistema 2

$F'_1 = (15\, \boldsymbol{i} + 20\, \boldsymbol{j} + 18\, \boldsymbol{k})$ Kgf ; con su línea de acción pasando por P(0, 0, 0)

$C'_1 = (-12\, \boldsymbol{i} - 2\, \boldsymbol{j} - 3\, \boldsymbol{k})$ Kgf.m.

Las coordenadas de los puntos están dadas en metros (m). Verifique si estos dos sistemas de fuerzas son equivalentes.

Nº 21: Idem al problema anterior si los sistemas son:

Sistema 1

$F_1 = (-200\, \boldsymbol{j})$ Kgf ; con su línea de acción pasando por P(0, 0, 0)

$C_1 = (800\, \boldsymbol{k})$ Kgf.m.

Sistema 2

$F'_1 = (-200\, \boldsymbol{j})$ Kgf ; con su línea de acción pasando por el punto P (12, 0, 0)

$C'_1 = (800\, \boldsymbol{k})$ Kgf.m

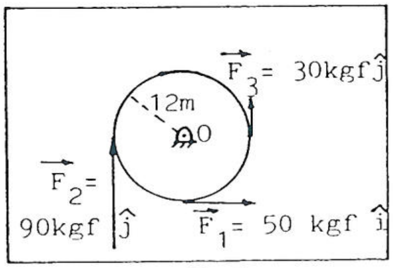


Fig.43

Nº 22: Dado el sistema de fuerzas que actúa sobre la placa circular ilustrada en la fig. 43, encontrar la fuerza aplicada en O y el M_o^R equivalentes al sistema dado.

Nº 23: Dadas las fuerzas $\mathbf{F}_1 = (3\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k})$ Kgf y $\mathbf{F}_2 = (-2\,\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k})$ Kgf cuyos puntos de aplicación sobre un cuerpo son (0,4 ; 0,5 ; 0) m y (0,4 ; – 0,1 ; 0,8) m respectivamente, encontrar cual es la reducción mínima de este sistema.

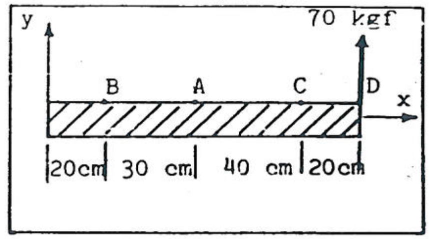


Fig.44

Nº 24: Dado el sistema de fuerzas de la fig. 44, reemplazar la fuerza aplicada en D por un sistema equivalente formado por una fuerza actuando en A y una cupla cuyas fuerzas actúan en la dirección de y, y están aplicadas en C y B.

Nº 25: El cuerpo rígido ilustrado en la fig. 45 está sujeto al par de fuerzas indicado. Se desea reemplazar estas fuerzas, por una fuerza de 200 Kgf aplicada en A y otra fuerza **F** aplicada en C.
Encontrar la distancia d, el módulo F y el ángulo φ que debe formar esta fuerza con el eje x para que los dos sistemas sean equivalentes.

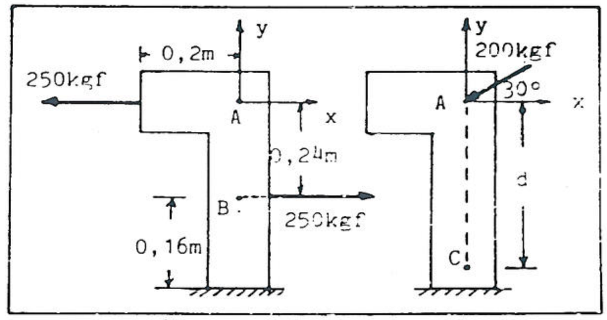


Fig.45

---

c. Sistemas que pueden ser reducidos a una única fuerza

La importancia de este tema, aparte de su valor conceptual, radica en el hecho de que si todo el sistema de fuerzas puede ser reemplazado por una sola, bastará aplicarle otra fuerza igual y de sentido contrario en el lugar adecuado para anular el efecto de todo el sistema de fuerzas. Esto es de una gran utilidad práctica.
Para que un sistema de fuerzas aplicado a un cuerpo rígido pueda ser reducido a una única fuerza es necesario:
1– Que esa fuerza sea la fuerza resultante del sistema. Esto debe ser así para que se cumpla la condición de que ambos sistemas deben tener la misma resultante y que los efectos en cuanto a traslación sean los mismos.
2– Que el momento de esa fuerza resultante respecto a un punto sea el mismo que el momento resultante del sistema respecto al mismo punto. Esto es necesario para que el efecto de rotación que provoque esta única fuerza sea el mismo que provocan todos los momentos del sistema original.
Esto se expresa analíticamente de la siguiente forma:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \mathbf{R} \times \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i} \quad \text{ó} \quad \boxed{\mathbf{M}_o^R = \mathbf{R} \times \mathbf{F}^R} \qquad ec.\ 8$$

Las expresiones anteriores se leerán así:

"El **momento resultante** de un sistema de fuerzas respecto de un punto O cualquiera, es igual al **momento de la fuerza resultante** respecto al mismo punto O."

Esta es la condición necesaria y suficiente que cualquier sistema de fuerzas debe satisfacer para que pueda ser reducido a únicamente la fuerza resultante.

Nótese que para que sea posible la reducción, el M^R debe ser perpendicular a F^R, **esa es una condición necesaria aunque no suficiente.**

Cuando querramos saber si un sistema puede ser reducido a una única fuerza, lo primero que debemos hacer es calcular la fuerza resultante, luego el momento resultante y verificar si el producto escalar de ambos vectores es nulo (condición de perpendicularidad).

Si este producto es distinto de cero, podemos afirmar que tal sistema de fuerzas no se puede reducir a la fuerza resultante. Si en cambio el producto escalar es nulo, deberemos plantear la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \mathbf{R} \times \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i$$

para encontrar cual debe ser **R**, lugar de aplicación de la fuerza resultante, para que el sistema quede reducido a esa única fuerza.

Si el sistema de fuerzas es tal que $F^R = 0$ y $M^R \neq 0$, entonces sólo podrá ser reducido a una cupla.

Ejemplo Nº 15: Sea el siguiente sistema de tres fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido en los puntos que se indican:

$\mathbf{F}_1 = (3, 1, 2)$ Kgf $\qquad \mathbf{r}_1 = (2, 3, -4)$ m

$\mathbf{F}_2 = (2, 4, -2)$ Kgf $\qquad \mathbf{r}_2 = (7, 3, 1)$ m

$\mathbf{F}_3 = (-2, -3, 0)$ Kgf $\qquad \mathbf{r}_3 = (2, -1, 0)$ m

a) encuentre la fuerza resultante y el momento resultante del sistema, este último respecto al origen de coordenadas.
b) analice si este sistema puede ser reducido a una única fuerza.

Solución:

a) $\mathbf{F}^R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$

$$\mathbf{F}^R = (3+2-2)\,\boldsymbol{i} + (1+4-3)\,\boldsymbol{j} + (2-2+0)\,\boldsymbol{k}$$

$$\boxed{\mathbf{F}^R = (3\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} + 0\,\boldsymbol{k})\ \text{Kgf}}$$

Se obvian las unidades por brevedad.

$$\mathbf{M}_o^R = \mathbf{M}_o^1 + \mathbf{M}_o^2 + \mathbf{M}_o^3$$

$$\mathbf{M}_o^1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10\,\boldsymbol{i} - 16\,\boldsymbol{j} - 7\,\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{M}_o^2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 7 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -10\,\boldsymbol{i} + 16\,\boldsymbol{j} + 22\,\boldsymbol{k}$$

$$M_o^3 = r_3 \times F_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -8\,k$$

$$\boxed{M_o^R = (7 \text{ Kgf.m})\,k}$$

b) Para que el sistema pueda ser reducido a una única fuerza, deberá cumplirse que $F^R \perp M_o^R$.

Se ve que efectivamente son perpendiculares pues F^R está contenida en el plano (xy) y el M_o^R tiene la dirección z.

Hagamos algo más: busquemos donde habrá que aplicar a la F^R para que el sistema quede reducido a ella.

Planteamos: $M_o^R = R \times F^R$

$$7\,k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ R_x & R_y & R_z \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\,R_z\,i + 3\,R_z\,j + (2\,R_x - 3\,R_y)\,k$$

Igualando componente a componente resulta:

$2\,R_x - 3\,R_y = 7$ ecuación de una recta en el plano (xy)

$R_z = 0$

Encontramos la línea de acción de la fuerza resultante a través de la ecuación de la recta.
Los puntos de corte de esta recta sobre los ejes x e y son:

$x = \dfrac{7}{2}$, $y = -\dfrac{7}{3}$ Gráficamente (Fig. 46)

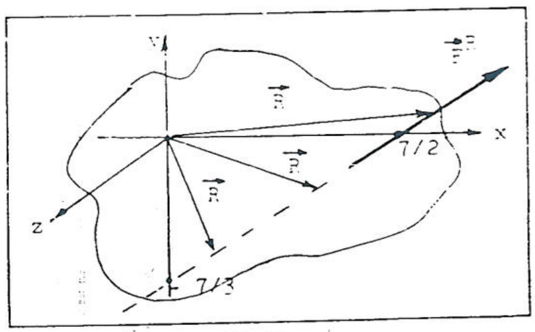


Fig.46

Ejemplo Nº 16: Sea el siguiente sistema de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido en los puntos que se indican:

$F_1 = (3, -2, 1)$ Kgf	$r_1 = (1,1,0)$ m
$F_2 = (-2, 1, 0)$ Kgf	$r_2 = (0, 2, 0)$ m
$F_3 = (2, 5, 1)$ Kgf	$r_3 = (3, 0, 0)$ m
$F_4 = (3, 4, 2)$ Kgf	$r_4 = (2, 2, 0)$ m

a) Encuentre la fuerza resultante del sistema y el momento respecto del origen de coordenadas y analice si puede reducir este sistema a una única fuerza.
b) Idem, si F_4 invierte su sentido.

Solución:

a) $\mathbf{F}^R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4$

$$\mathbf{F}^R = (3-2+2+3)\, \boldsymbol{i} + (-2+1+5+4)\, \boldsymbol{j} + (1+1)\, \boldsymbol{k}$$

$$\boxed{\mathbf{F}^R = (6\, \boldsymbol{i} + 8\, \boldsymbol{j} + 4\, \boldsymbol{k})\ \text{Kgf}}$$

$$\mathbf{M}_o^R = \mathbf{M}_o^1 + \mathbf{M}_o^2 + \mathbf{M}_o^3 + \mathbf{M}_o^4$$

$$\mathbf{M}_c^R = (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}) + (4\boldsymbol{k}) + (-3\boldsymbol{j} + 15\boldsymbol{k}) + (4\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})$$

$$\boxed{\mathbf{M}_o^R = (5\, \boldsymbol{i} - 8\, \boldsymbol{j} + 16\, \boldsymbol{k})\ \text{Kgf.m}}$$

Calculemos ahora $\mathbf{F}^R . \mathbf{M}^R = 30 - 64 + 64 = 30$; como $\mathbf{F}^R . \mathbf{M}_o^R \neq 0$ no son perpendiculares y no se cumple la condición necesaria. Por ende este sistema de fuerzas no puede ser reducido a solamente la fuerza resultante; será además necesaria una cupla de momento igual a $\mathbf{M}_o^R$.

b) Si ahora $\mathbf{F}_4 = (-3, -4, -2)$ Kgf resulta $\mathbf{F}^R = 0$ y calculando el $\mathbf{M}_o^R$ resulta: $\mathbf{M}_o^R = (-3\, \boldsymbol{i} + 12\, \boldsymbol{k})$ Kgf.m. (Verifíquelo)

Como $\mathbf{F}^R = 0$ y $\mathbf{M}_o^R \neq 0$, el sistema se reduce a una cupla.

Problemas propuestos

Nº 26: Sea el siguiente sistema de fuerzas que actuan sobre un cuerpo rígido en los puntos que se indican:

$\mathbf{F}_1 = (3, 1, 2)$ Kgf $\qquad \mathbf{r}_1 = (2, 3, -4)$ cm
$\mathbf{F}_2 = (2, 4, -2)$ Kgf $\qquad \mathbf{r}_2 = (7, 3, 1)$ cm

Analice si este sistema de fuerzas puede ser reducido a una única fuerza. En caso que su respuesta sea afirmativa, encuentre el lugar de aplicación de la resultante para que ello ocurra. Si su respuesta es negativa, explique porqué.

Nº 27: Idem al problema anterior si el sistema de fuerzas es:

$\mathbf{F}_1 = (3, 1, 2)$ Kgf $\qquad \mathbf{r}_1 = (2, 3, -4)$ cm
$\mathbf{F}_2 = (2, 4, -2)$ Kgf $\qquad \mathbf{r}_2 = (7, 3, 1)$ cm
$\mathbf{F}_3 = (1, 2, 0)$ Kgf $\qquad \mathbf{r}_3 = (3, -2, 0)$ cm

---

Vamos a demostrar que hay tres tipos de sistemas de fuerzas a los cuales si se desea, se los puede reducir a únicamente la fuerza resultante.
Tales son los sistemas de fuerzas concurrentes, los coplanares y los paralelos.

Sistemas de Fuerzas Concurrentes

Sea el siguiente sistema de fuerzas aplicado a un cuerpo rígido como se muestra en la fig. 47.
Es un sistema de fuerzas concurrentes ya que todas las lineas de acción de las fuerzas se intersectan en el punto común c.

Por definición:

$$\boxed{\mathbf{F}^R = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i}$$

$$\boxed{\mathbf{M}_o^R = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_{i/o} \times \mathbf{F}_i)}$$

ec. 9

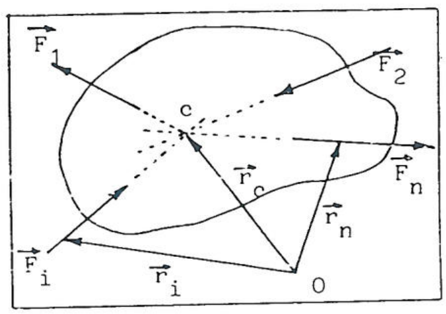


Fig.47

Como demotramos que $\mathbf{r}_{i/o}$ es el vector que va desde O hasta cualquier punto de la línea de acción de la fuerza $\mathbf{F}_i$, se pueden tomar como vectores $\mathbf{r}_{i/o}$ al $\mathbf{r}_c$ ya que todas las líneas de acción pasan por ese punto, es decir:

$$\mathbf{M}_o^R = \mathbf{r}_c \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_c \times \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{r}_c \times \mathbf{F}_n$$

$$\mathbf{M}_o^R = \mathbf{r}_c \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n)$$

$$\boxed{\mathbf{M}_o^R = \mathbf{r}_c \times \mathbf{F}^R}$$

ec. 10

Por definición de producto vectorial $\mathbf{M}^R$ es perpendicular en este caso a $\mathbf{F}^R$ y se cumple la condición necesaria y suficiente para que el sistema pueda ser reducido a la $\mathbf{F}^R$.

Conclusión

Si se tiene un sistema de fuerzas concurrentes aplicadas a un cuerpo rígido (o a una partícula) basta aplicar una única fuerza, la resultante, en el punto de concurrencia para que el sistema quede reducido a esa única fuerza.

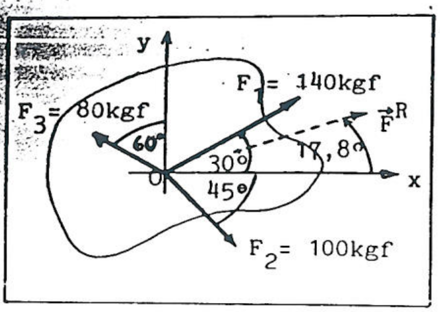


Fig. 48

Ejemplo Nº 17: **Determine la resultante de las tres fuerzas que se muestran en la figura, las cuales actúan sobre un cuerpo en un mismo punto O y están en el plano (xy) y encuentre dónde debe aplicarse para que el sistema quede reducido a ella. Fig. 48.**

Solución: **Como el sistema de fuerzas es concurrente, el punto de aplicación debe ser el de concurrencia O.**

$$\mathbf{F}^R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

$$F_x^R = 140 \cos 30° + 100 \cos 315° + 80 \cos 150°$$

$$F_y^R = 140 \operatorname{sen} 30° + 100 \operatorname{sen} 315° + 80 \operatorname{sen} 150°$$

$F_x^R = 122{,}7$ Kgf $\qquad F_y^R = 39{,}3$ Kgf

$$F^R = \sqrt{(127{,}7)^2 + (39{,}3)^2} \qquad \boxed{F^R = 128{,}8 \text{ Kgf}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{39.3}{122.7} \qquad \boxed{\varphi = 17{,}8°}$$

Sistemas de Fuerzas Coplanares

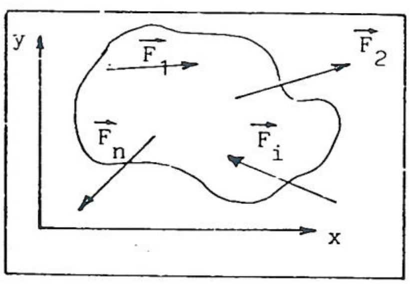


Fig. 49

En la fig. 49 se ilustra a un sistema de fuerzas coplanares no concurrentes aplicado a un cuerpo rígido.
Todas las fuerzas están contenidas en el plano (xy) por ende:

$$\mathbf{F}_i = F_{ix}\, \boldsymbol{i} + F_{iy}\, \boldsymbol{j}$$

Como por definición $\mathbf{F}^R = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$, resulta $\mathbf{F}^R = (\sum_{i=1}^{n} F_{ix})\, \boldsymbol{i} + (\sum_{i=1}^{n} F_{iy})\, \boldsymbol{j}$

definiendo a $\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_x^R$ y $\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_y^R$

resulta: $$\boxed{\mathbf{F}^R = F_x^R\, \boldsymbol{i} + F_x^R\, \boldsymbol{j}}$$

Naturalmente, la fuerza resultante también está contenida en el plano (xy). Encontrada la fuerza resultante, se plantea el interrogante de si existe un punto tal que aplicada la resultante en ese punto, el momento de la resultante sea igual al momento resultante; y si existe ese punto, o puntos, cómo encontrarlos. Cuando las fuerzas son concurrentes, ya se demostró que ese punto existe y es el de concurrencia. Veremos que en este caso también existe y un razonamiento sencillo nos permite afirmarlo.
Al estar todas las fuerzas contenidas en un plano, su resultante F^R está también contenida en el mismo plano, como se demostró más arriba.

Si a los momentos los calculamos respecto a cualquier punto ubicado en ese plano, los vectores posición de cada una de las fuerzas estarán también en el mismo plano (de no elegirlo así se complica algo la visualización del problema pero el resultado es el mismo).
Esto quiere decir que todos los momentos de las fuerzas serán perpendiculares a ese plano y por lo tanto el momento resultante también.
Entonces, el momento resultante es perpendicular a la fuerza resultante y ésta es la condición necesaria para que el sistema se pueda reducir a la resultante.
La condición necesaria y suficiente establece que:

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \mathbf{R} \times \mathbf{F}^R$$

pero $\qquad \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = (x_i F_{iy} - y_i F_{ix})\, \boldsymbol{k}$

y $\qquad \mathbf{R} \times \mathbf{F}^R = (R_x F_y^R - R_y F_x^R)\, \boldsymbol{k}$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = R_x F_y^R - R_y F_x^R} \qquad \textit{ec. 11}$$

Conocidas las fuerzas $\mathbf{F}_i$ y los puntos de aplicación de las mismas, sólo quedan como incógnitas R_x y R_y ya que:

$\sum_{i=1}^{n} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = M_{oz}$ se puede calcular al igual que:

$$F_y^R = A \qquad \text{y} \qquad F_x^R = B$$

Quedando: $\boxed{A R_x - B R_y = M_{oz}}$ *ec. 12*

Esta es la ecuación de una recta; en lugar de un punto hay toda una recta en el cuerpo sobre la cual puede ser aplicada la resultante para obtener los mismos efectos que produce todo el sistema de fuerzas. Verifique que la pendiente de la recta coincide con la pendiente de la fuerza resultante. ¿Por qué necesariamente debe ocurrir esto?
Para encontrar los puntos donde la recta intersecta a los ejes, basta plantear $R_x = 0$ en la ec. 12; se obtiene entonces:

$Y_c = -\dfrac{M_{oz}}{B}$ y luego plantear $R_y = 0$ y se obtiene $X_c = \dfrac{M_{oz}}{A}$

Por ello, los puntos sobre los ejes por los cuales debe pasar la línea de acción de la fuerza resultante son:

$$\boxed{X_c = \frac{M_{oz}}{F_y{}^R}} \qquad \boxed{Y_c = -\frac{M_{oz}}{F_x{}^R}} \qquad \textit{ec. 13}$$

Si se desea encontrar la distancia d de esta recta al punto respecto del cual se calculan los momentos, basta plantear:

$$\boxed{M_{oz} = d \cdot F^R} \qquad \boxed{d = \frac{M_{oz}}{F^R}}$$

Los ejemplos siguientes le ayudarán a terminar de entender este tema.

Ejemplo Nº 18: Tres personas ejercen fuerzas horizontales sobre una mesa rectangular, como se muestra en la fig. 50.
¿Cuál será la única fuerza que tenga el mismo efecto que estas tres personas, y en qué punto del borde BC deberá aplicarse esa fuerza?

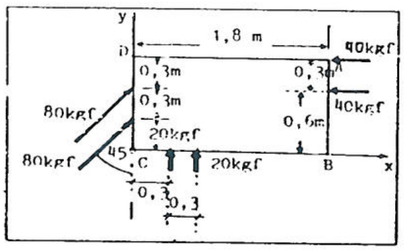


Fig.50

Solución:

$$F^R = [\,2(80\cos 45^\circ) - 2(40)\,]\,\boldsymbol{i} + [\,2(80\,\mathrm{sen}\,45^\circ) + 2(20)\,]\,\boldsymbol{j}$$

$$\boxed{F^R = (33{,}1\,\boldsymbol{i} + 153{,}1\,\boldsymbol{j})\ \mathrm{Kgf}}$$

$$M_c = [-(80\ \mathrm{sen}\,45^\circ)(0{,}3) - (80\ \mathrm{sen}\,45^\circ)(0{,}6) + \\ + 20(0{,}3) + 20(0{,}6) + 40(0{,}6) + 40(0{,}9)]\,\boldsymbol{k}$$

$$\boxed{M_c = (27{,}1\ \mathrm{Kgf.m})\,\boldsymbol{k}}$$

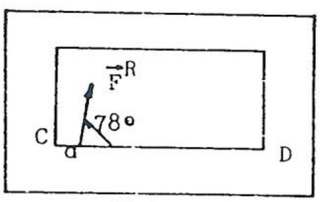


Fig.50 a

Entonces de acuerdo a la ec. 12

$$27{,}1\ \mathrm{m} = 153{,}1\ R_x - 33{,}1\ R_y$$

$$x_c = \frac{27.1}{153.1} = 0{,}18\ \mathrm{m} \qquad \boxed{d = 0{,}18\ \mathrm{m}}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{153.1}{33.1} \qquad \boxed{\varphi = 78^\circ}$$

Ejemplo Nº 19: En los ejemplos Nº 2 y Nº 9 se calcularon la F^R y el M_o^R ; se desea ahora para el mismo sistema de fuerzas encontrar dónde debe estar aplicada la F^R respecto de A para que el sistema quede reducido a esta única fuerza.

Solución: Utilizamos los resultados obtenidos anteriormente:

$$F^R = (-40{,}0\,\boldsymbol{i} - 32{,}0\,\boldsymbol{j})\ \mathrm{Kgf}$$

$$M_A^R = (-35{,}2\ \mathrm{Kgf.m})\,\boldsymbol{k}$$

Por la ec. 12 resulta: $\boxed{-35{,}2\ \mathrm{m} = -32\ R_x + 40\ R_y}$

Para encontrar los puntos de intersección de la recta con los ejes (xy), planteamos sucesivamente $R_y = 0$ y $R_x = 0$, (ec. 13)

Resulta: $x_c = \dfrac{-35.2}{-32} = 1{,}10\,\text{m}$

$$y_c = \frac{-35.2}{40} = -0{,}88\,\text{m}$$

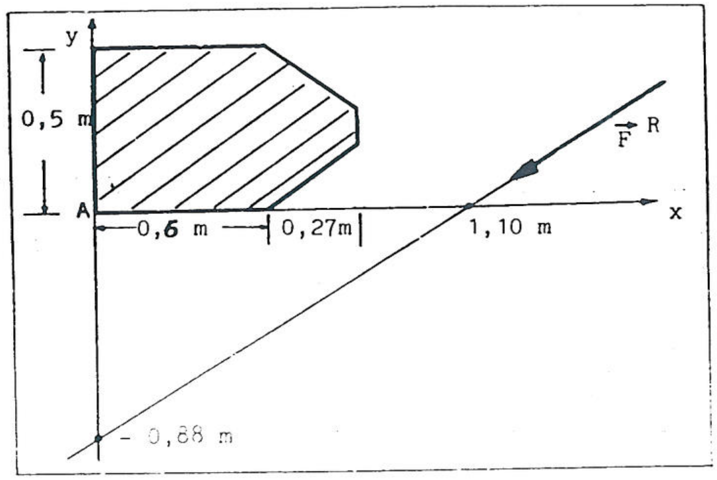


Fig.51

... ¡Y aquí aprendemos algo nuevo!... A pesar de que se cumplen las condiciones y se puede encontrar dónde debe aplicarse la fuerza resultante, la respuesta no tiene sentido desde el punto de vista práctico ya que la recta de acción no pasa por donde se encuentra el cuerpo.

Desde el punto de vista real y concreto, no se podría reducir este sistema a una única fuerza, aunque teóricamente si se podría.

Problemas propuestos

Nº 28: En el problema propuesto Nº 7, encontrar dónde debe estar aplicada la fuerza resultante para que el sistema sea reducido a esa única fuerza.

Nº 29: Dado el sistema de fuerzas que se muestra en la figura 52, redúzcalo a una única fuerza.

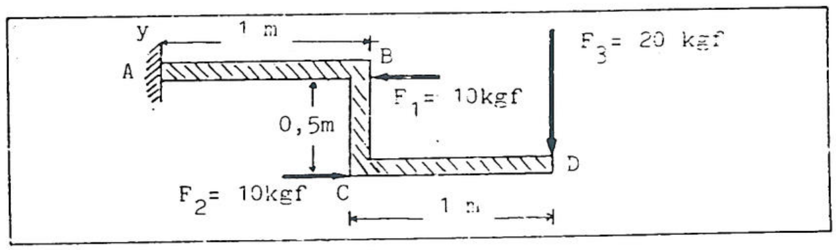


Fig.52

Nº 30: Determinar si el siguiente sistema de fuerzas aplicadas a una estructura rígida como la mostrada en la fig. 53 puede ser reducido a una única fuerza.

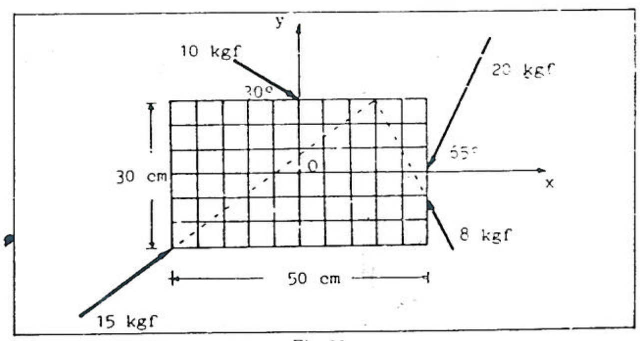


Fig.53

Nº 31: La figura 54 muestra a un cuerpo rígido sujeto a la acción de varias fuerzas coplanares.

a) Calcule la fuerza resultante del sistema, en módulo, dirección y sentido.

b) Calcule el torque resultante del sistema de fuerzas respecto del punto O.

c) Analice si este sistema puede ser reducido a una única fuerza. De ser posible la reducción encuentre donde debe estar aplicada la fuerza resultante para reducir al sistema. De no ser posible, explique porque.

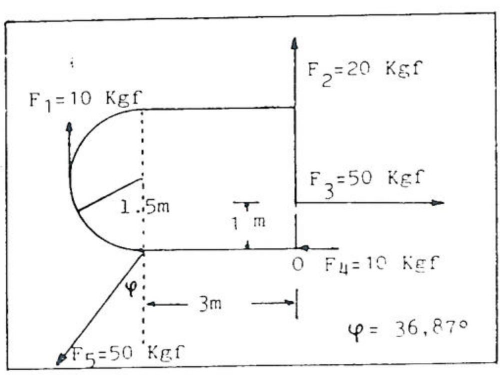


Fig.54

Sistemas de Fuerzas Paralelas

Hemos visto que para un sistema de fuerzas coplanares, siempre es posible encontrar un lugar de aplicación de la fuerza resultante, de forma que se cumpla que el momento resultante del sistema de fuerzas sea igual al momento de la fuerza resultante (al menos teóricamente).
Esto se cumple respecto a cualquier punto que se calculen los momentos.
En cambio para un sistema cualquiera de fuerzas en el espacio, esto no es cierto en general. Si las fuerzas son concurrentes sí es válido.
Otro caso de fuerzas en el espacio, para el cual puede demostrarse esa interesante propiedad es cuando todas las fuerzas del sistema son paralelas.

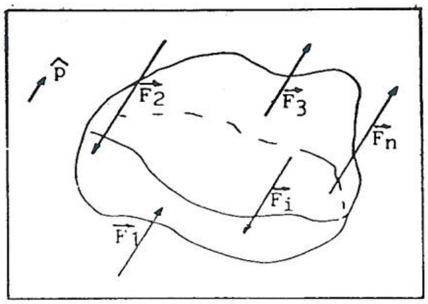


Fig.55

Supongamos sea $\boldsymbol{p}$ el versor que indica la dirección de las rectas paralelas, aplicadas a un cuerpor rígido, tal como muestra la fig. 55.
Entonces $\mathbf{F}_i = F_i\,\boldsymbol{p}$ donde F_i es la componente (no módulo) de $\mathbf{F}_i$ en la dirección de $\boldsymbol{p}$ y puede ser positiva o negativa.
En determinados casos $\boldsymbol{p}$ puede coincidir con $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, ó $\boldsymbol{k}$.
La fuerza resultante es:

$$\mathbf{F}^R = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \qquad\qquad \mathbf{F}^R = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \right) \boldsymbol{p}$$

$$F^R = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \right)$$

El momento resultante respecto a un punto O cualquiera, es:

$$\mathbf{M}_o = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$$

$$\mathbf{M}_o = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times F_i\,\boldsymbol{p})$$ y por propiedad del producto vectorial

$$\mathbf{M}_o = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\,\mathbf{r}_i \right) \times \boldsymbol{p}$$

Como: $\mathbf{F}^R = F^R\,\boldsymbol{p}$ se ve inmediatamente que $\mathbf{M}_o$ es perpendicular a $\mathbf{F}^R$.
Es posible entonces encontrar el vector posición $\mathbf{R}$ respecto de O para que se cumpla que:

$$\mathbf{R} \times \mathbf{F}^R = \mathbf{M}_o^R$$

Es decir:

$$\mathbf{R} \times (F^R)\,\boldsymbol{p} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\,\mathbf{r}_i \right) \times \boldsymbol{p}$$

$$\boxed{F^R\,\mathbf{R} \times \boldsymbol{p} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\,\mathbf{r}_i \right) \times \boldsymbol{p}} \qquad \text{ec. 14}$$

La igualdad se satisface si:

$$F^R\,\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} F_i\,\mathbf{r}_i$$

De donde:

$$\boxed{\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{F}_i\ \mathbf{r}_i)}{\mathbf{F}^R}} \qquad \textit{ec. 15}$$

En realidad este R obtenido es el menor de todos los posibles vectores que van desde O hasta la línea de acción de la fuerza resultante.
De acuerdo a la figura, todos los vectores dibujados entre O y la línea de acción son equivalentes para el cálculo del momento de la fuerza resultante.

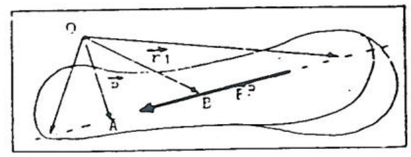


Fig.56

El $\mathbf{r}_1$ por ejemplo, se puede escribir como:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + AB\ \boldsymbol{p}$$

Es decir, como la suma del vector **R** más un vector paralelo a $\boldsymbol{p}$; lo mismo para todos los demás **r** . Por ello si se reemplaza en la ec. 14 a **R** por $\mathbf{r}_1$ la misma se sigue satisfaciendo pues:

$$\mathbf{F}^R\ \mathbf{r}_1 \times \boldsymbol{p} = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i\ \mathbf{r}_i\right) \times \boldsymbol{p}$$

pero $\quad \mathbf{F}^R(\mathbf{R} + AB\ \boldsymbol{p}) \times \boldsymbol{p} = \mathbf{F}^R\ \mathbf{R} \times \boldsymbol{p}$

ya que $\quad \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{p} = 0$

En conclusión se puede decir que el sistema de fuerzas paralelas queda reducido a la fuerza resultante si la misma se aplica en la posición **R** respecto de O, o sobre cualquier punto dado por $\mathbf{r} = \mathbf{R} + a\boldsymbol{p}$ donde a es una distancia cualquiera (dentro de las dimensiones del cuerpo rígido) sobre la línea de acción de la fuerza resultante.

Conviene para fines prácticos escribir la ec. 15 en componentes cartesianas ortoganales.

$$\boxed{R_x = \frac{\sum F_i\ x_i}{\sum F_i} \qquad R_y = \frac{\sum F_i\ y_i}{\sum F_i} \qquad R_z = \frac{\sum F_i\ z_i}{\sum F_i}} \qquad \textit{ec. 16}$$

(¿Podría simplificarse la sumatoria de las fuerzas que aparece en el denominador con la que está en el numerador?)

El punto correspondiente al vector posición **R**, suele denominarse centro de las fuerzas paralelas y veremos que un caso especial, sumamente importante, es el denominado **centro de gravedad**. Esto se desarrollará luego de los ejemplos.

Ejemplo Nº 20: Determinar la resultante del sistema de fuerzas paralelas y coplanares aplicadas a una viga, tal como se muestra en la fig. 57 y reducir el sistema a esa única fuerza. Fig. 57.

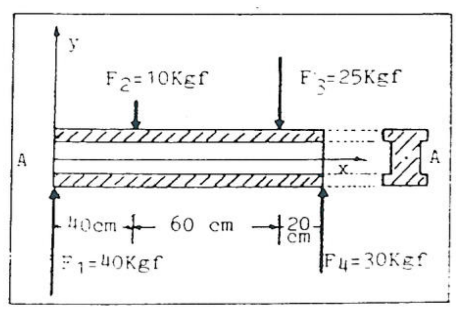


Fig.57

Solución: Este problema se podría hacer usando los resultados y fórmulas obtenidos al tratar el tema de fuerzas coplanares. Como a todas las fuerzas se las puede suponer actuando sobre el eje de las x, las cordenadas y_i de los puntos de aplicación de estas fuerzas serían todas nulos y la ec. 12 quedaría:

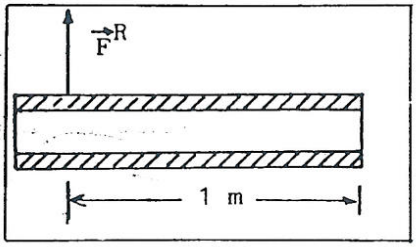


Fig.58

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\ F_{iy} = R_x\ F_y^R - R_y\ F_x^R$$

pero como todas las fuerzas sólo tienen componente y, es: $F_x^R = 0$

y resulta $$\sum_{i=1}^{n} x_i\ F_{iy} = R_x\ F_y^R \qquad R_x = \frac{\sum x_i\ F_{iy}}{F_y^R}$$

que es justamente la que sale de las ec. 16 en forma directa.
Por ello si el sistema de fuerzas es coplanar y paralelo, conviene utilizar las ec. 16 ya que nos llevan más rápidamente a la solución buscada.
Reemplazando valores:

$$R_x = \frac{(40 \times 0 - 10 \times 40 - 25 \times 100 + 30 \times 120)}{(40 - 10 - 25 + 30)} \text{ cm}$$

$$R_x = \frac{700}{35} \text{ cm} \qquad \boxed{R_x = 20 \text{ cm}}$$

$$F^R = (35 \text{ Kgf})\ \boldsymbol{j}$$

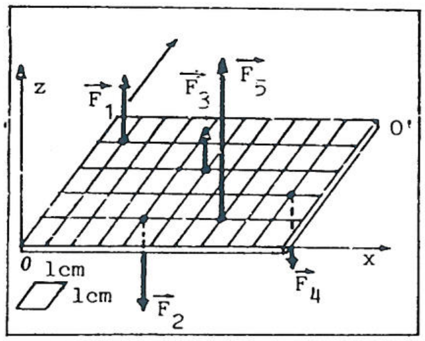


Fig.59

Ejemplo Nº 21: Se tiene un sistema de fuerzas paralelas aplicadas sobre una placa rígida como se muestra en la figura 59.
Se quiere reducir este sistema a una única fuerza.
Encontrar el valor de tal fuerza y donde debe estar aplicada sobre la placa.

Datos: $F_1 = 20$ kgf, $F_2 = 30$ kgf, $F_3 = 10$ kgf, $F_4 = 20$ kgf, $F_5 = 50$ kgf.

Solución:

$$F^R = \sum_{i=1}^{5} F_i = (20 - 30 + 10 - 20 + 50) \text{ Kgf}$$

$$F^R = 30 \text{ Kgf} \qquad F^R = (30 \text{ Kgf})\ \boldsymbol{k}$$

Para ubicar la recta de acción de la fuerza resultante, aplicamos directamente las ec. 16.

$$R_x = \frac{\sum F_i\ x_i}{F^R} = \frac{(20 \times 1 - 30 \times 4 + 10 \times 5 - 20 \times 9 + 50 \times 7)}{30} \text{ cm}$$

$$\boxed{R_x = 4 \text{ cm}}$$

$$R_y = \frac{\sum F_i\ y_i}{F^R} = \frac{(20 \times 4 - 30 \times 1 + 10 \times 3 - 20 \times 2 + 50 \times 1)}{30} \text{ cm}$$

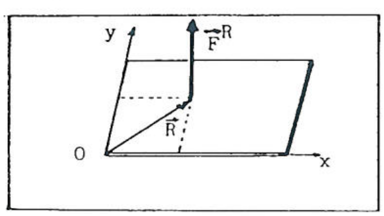


Fig.59.a

$$R_y = 3 \text{ cm} \qquad R_z = 0$$

$$\mathbf{R} = (4\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j}) \text{ cm}$$

Esta única fuerza provoca sobre la placa el mismo efecto que las cinco originales. (Ver fig. 59 a)

Problemas propuestos

Nº 32: Una viga está sometida a un sistema de fuerzas como se indica en la figura 60.
Reducir este sistema a una única fuerza.

Nº 33: Una placa de 10 m x 15 m soporta cinco columnas que ejercen sobre ellas las fuerzas indicadas en la fig. 61. Hallar la resultante **F** del sistema de fuerzas y su punto de aplicación sobre la placa para que el sistema quede reducido a ella.

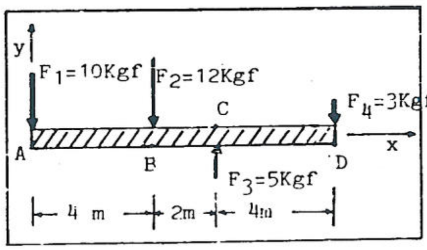


Fig.60

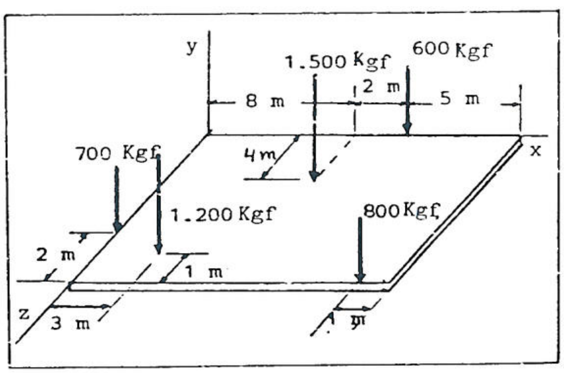


Fig.61

Tabla I

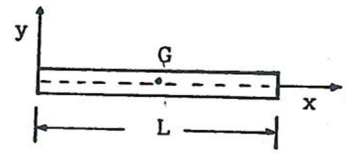
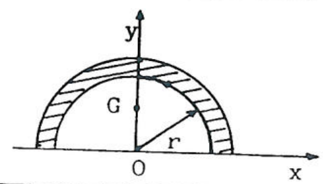
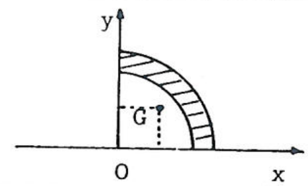
Forma	Figura	X_G	Y_G	Longitud
Segmento Recto (barra)		$\frac{L}{2}$	0	L
Semi-circunferencia		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Cuarto de circunferencia		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$

Tabla II

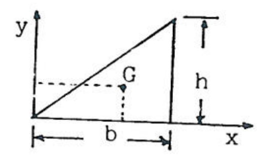
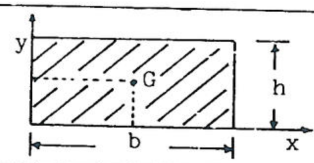
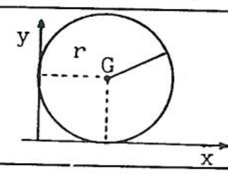
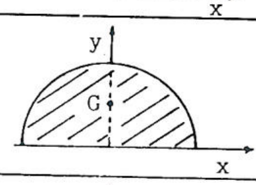
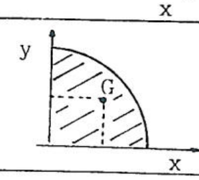
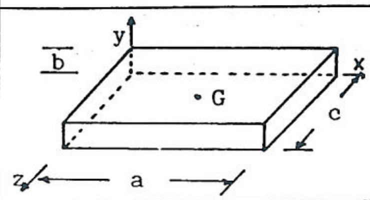
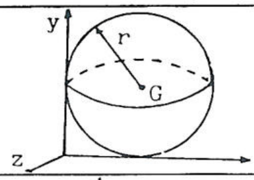
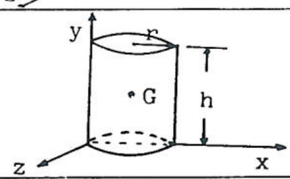
Forma	Figura	X_G	Y_G	Area
Triángulo rectángulo		$\frac{2b}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Rectángulo		$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$	bh
Círculo		r	r	πr^2
Semicírculo		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Cuarto de círculo		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$

Tabla III

Forma	Figura	X_G	Y_G	Z_G	Volumen
Paralelepípedo		$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{c}{2}$	a b c
Esfera		r	r	0	$\frac{4 \pi r^3}{3}$
Cilindro		r	$\frac{h}{2}$	0	$\pi r^2 h$

Ejemplo Nº 24: Determinar el centro de masa de la placa homogénea que se muestra en la figura 63.

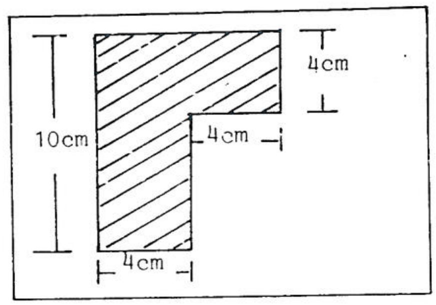


Fig.63

Solución: La placa puede ser considerada como suma de dos placas, una rectangular de $4 \times 10\ cm^2$ y otra cuadrada de $4 \times 4\ cm^2$ de superficie.
Se puede calcular el centro de masa de cada placa y transformar este problema en el de encontrar el centro de masa de dos partículas ubicadas en los centros de masa de cada placa y con la misma masa de cada una de ellas.
Llamaremos m_1 y m_2 a las masas de la placa rectangular y cuadrada respectivamente. (Fig. 64)

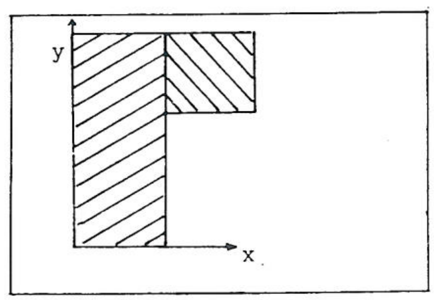


Fig.64

$m_1 = \rho \times 4 \times 10$ $\qquad$ $m_2 = \rho \times 4 \times 4$

De acuerdo a la tabla II

$x_1 = 2$ cm $\qquad$ $x_2 = 6$ cm

$y_1 = 5$ cm $\qquad$ $y_2 = 8$ cm

Aplicando las ec. 19

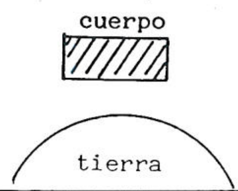
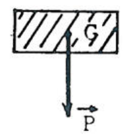
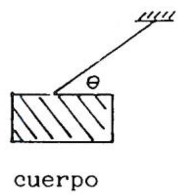
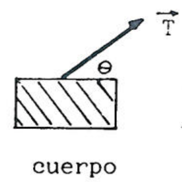
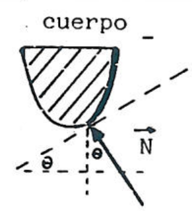
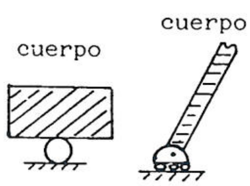
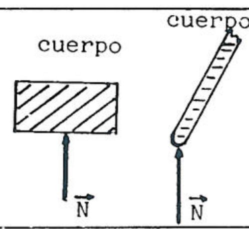
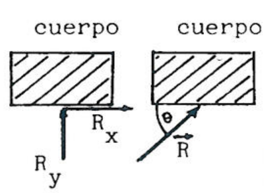
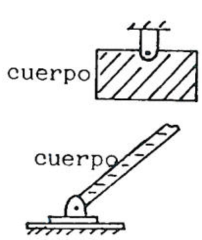
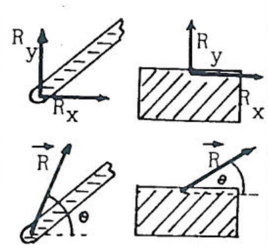
$$X_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\rho \times 10 \times 2 + \rho \times 4 \times 6}{\rho . 10 + \rho . 4} = \frac{44}{14} \text{ cm}$$

$$\boxed{X_G = 3{,}14 \text{ cm}}$$

$$Y_G = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{\rho (10 \times 5 + 4 \times 8)}{\rho (10 + 4)} = \frac{82}{14} \text{ cm}$$

$$\boxed{Y_G = 5{,}86 \text{ cm}}$$

Tabla I

Nombre del cuerpo que va ser removido	Croquis de los cuerpos interactuantes	Acción del cuerpo removido	Descripción
Tierra			Siempre una fuerza perpendicular a la superficie de la tierra y que pasa por el centro de gravedad del cuerpo.
Cuerda o cable liviano			Siempre una fuerza en la dirección de la cuerda, denominada tensión y de sentido tal que hala al cuerpo que sujeta.
Superficie suave o lisa			Siempre una fuerza perpendicular a la superficie suave, llamada **normal**.
Rodillo			Siempre una fuerza perpendicular a la superficie sobre la cual el rodillo puede moverse. (Representan en general a apoyos sin razamiento).
Filo de Navaja			Una fuerza desconocida a través del punto de contacto a un ángulo desconocido, usualmente mostrada como dos componentes independientes. (Representa en general a apoyos con rozamiento).
Eje suave o pasador			Una fuerza desconocida en módulo y dirección a través del eje. Usualmente mostraba como dos componentes independientes.